

VISOKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA ZA INFORMACIONE TEHNOLOGIJE



predavač
mr Slobodan Tomić, dipl. ing.

RAČUNARSKA MATEMATIKA

skripta

Beograd, 2011.

S A D R Ž A J

1. UVODNI POJMOVI DISKRETNE MATEMATIKE	5
1.1 Neki znaci logičkih operacija i kvantifikatori.....	5
1.2 Osnovni pojmovi matematičke logike.....	6
1.3 Skupovi i relacije.....	9
1.4 Funkcija (kao preslikavanje skupova).....	21
2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI.....	25
2.1 SKUP REALNIH BROJEVA.....	25
2.1.1 Skup prirodnih brojeva (N).....	25
2.1.2 Skup celih brojeva (Z).....	26
2.1.3 Skup racionalnih brojeva (Q)	27
2.1.4 Skup iracionalnih brojeva (I)	27
2.1.5 Skup realnih brojeva (R).....	28
2.2 SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA (C)	30
2.2.1 Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku.....	32
2.2.2 Trigonometrijski oblik kompleks. brojeva i operacije sa njima....	34
2.2.3 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja.....	37
3. ELEMENT LINEARNE ALGEBRE.....	38
3.1 Matrice.....	38
3.1.1 Pojam matrice.....	38
3.1.2 Operacije sa matricama.....	40
3.2 Determinante.....	44
3.2.1 Izračunavanje determinante.....	44
3.2.2 Osobine determinante.....	46
3.2.3 Inverzna matrica.....	47
3.2.4 Rang matrice.....	49
3.3 Sistemi linearnih jednačina.....	50
3.3.1 Gausov algoritam.....	50
3.3.2 Kramerova metoda.....	51
3.3.3 Rešavanje homogenog sistema linearnih jednačina.....	53
3.3.4 Matrična metoda rešavanja sistema linearnih jednačina.....	54
4. VEKTORI.....	55
4.1 Pojam vektora. Osnovne operacije sa vektorima.....	55
4.2 Skalarni proizvod vektora.....	60

4.3	Vektorski proizvod vektora.....	62
4.4	Mešoviti proizvod vektora.....	63
5.	FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE.....	66
5.1	Realne funkcije jedne promenljive.....	66
5.2	Granične vrednosti i neprekidnost funkcija.....	70
5.3	Primena graničnih vrednosti pri određivanju asimptota funkcija.....	79
6.	DIFERENCIJALNI RAČUN.....	82
6.1	Izvod funkcija.....	82
6.2	Osnovna pravila diferenciranja.....	83
6.3	Izvod inverzne funkcije.....	86
6.4	Izvod složene funkcije.....	87
6.5	Logaritamski izvod.....	87
6.6	Izvod implicitne funkcije.....	89
6.7	Izvod parametarski zadatih funkcija.....	89
6.8	Geometrijsko značenje izvoda.....	90
6.9	Diferencijal funkcija.....	91
6.10	Izvodi i diferencijali višeg reda.....	92
6.11	Monotonost i ekstremne vrednosti funkcija.....	94
6.12	Ispitivanje toka funkcije.....	96
6.13	Osnovne teoreme diferencijalnog računa.....	104
7.	NEODREĐENI INTEGRAL	106
7.1	Pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala.....	106
7.2	Osobine neodređenog integrala.....	106
7.3	Tablica osnovnih integrala.....	107
7.4	Direktna integracija.....	108
7.5	Integracija smenom promenljive.....	108
7.6	Parcijalna integracija.....	115
7.7	Integracija racionalnih funkcija.....	118
7.8	Integracija iracionalnih funkcija.....	122
7.9	Integracija trigonometrijskih funkcija.....	123
8.	ODREĐENI INTEGRAL	125
8.1	Osnovna svojstva određenih integrala.....	126
8.2	Primena određenih integrala u geometriji	127
9.	BROJNI REDOVI	135
9.1	Osnovni pojmovi.....	135
9.2	Osnovne osobine i konvergencija brojnih redova.....	137
9.3	Potreban uslov za konvergenciju reda.....	138

9.4 Redovi sa pozitivnim članovima.....	139
9.5 Kriterijumi za ispitivanje konvergencije redova.....	139
9.5.1 Kriterijumi upoređivanja članova reda.....	140
9.5.2 Dalamberov kriterijum.....	141
9.5.3 Košijev kriterijum.....	145
9.5.4 Košijev integralni kriterijum.....	147
9.6 Alternativni redovi.....	149
9.6.1 Lajbnicov kriterijum.....	149
10. FUNKCIJE DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE.....	151
10.1 Pojam funkcije dve nezavisno promenljive.....	151
10.2 Granična vrednost i neprekidnost funkcije dve promenljive.....	152
10.3 Parcijalni izvodi i totalni diferencijal funkcije dve promenljive.....	152
10.4 Parcijalni izvod drugog reda.....	153
10.5 Diferencijal drugog reda.....	155
10.6 Ekstremne vrednosti funkcija dve nezavisne promenljive.....	156
11. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	161
11.1 Pojam diferencijalnih jednačina.....	161
11.2 Diferencijalne jednačine prvog reda.....	162
11.2.1 Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivim.....	163
11.2.2 Homogena diferencijalna jednačina prvog reda.....	169
11.2.3 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda.....	177
11.2.4 Bernulijeva diferencijalna jednačina	185
11.3 Diferencijalne jednačine drugog reda.....	191
11.3.1 Linearna diferencijalna jedn. sa konstantnim koeficijentima...	191
11.3.2 Homogena linearna dif. jedn. drugog reda sa konst. koeficij...	191
11.3.3 Nehomogena lin. dif. jedna. drugog reda sa konst. Koeficij...	192
12. PRILOZI	196
LITERATURA.....	200

1. UVODNI POJMOVI DISKRETNE MATEMATIKE

Ubrzani razvoj računarske tehnike zadnjih decenija, zahtevao je i adekvatan matematički aparat. Diskretna matematika je matematika računarskih nauka.

Konačnost memorije računara i činjenica da su računari mašine koje rade sa diskretnim vrednostima, uslovljava potrebu rešavanja velikog broja problema na konačnim ili mnogo ređe na beskonačnim, ali prebrojivim skupovima.

Doba računara dovelo je do sinteze raznih delova diskretne matematike, kao što je matematička logika sa algebrom i nizom novih matematičkih oblasti kao što je napr. teorija grafova, kombinatorika, teorija kodova.

Računarska tehnika danas, za svoje potrebe zahteva diskretnu matematiku.

Osim u računarskim naukama diskretna matematika ima velikog značaja i u mnogim drugim naučnim disciplinama, napr u telekomunikacijama, hemiji, ekonomskim naukama i td.

Ova matematička disciplina pre kompjuterskog doba nije bila atraktivna.

1.1 NEKI ZNACI LOGIČKIH OPERACIJA I KVANTIFIKATORI

Osnovno sredstvo za sporazumevanje među ljudima je jezik. Matematički jezik je najviši oblik naučnog jezika. Naime, matematičari je potreban jezik pomoću koga se izražavamo bez dvosmislenosti i nedorečenosti. Osnovu matematičkog jezika čine matematički izrazi.

- **Konstante** su veličine kojima se vrednost ne menja, npr. $2, 3, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{2}, L$
- **Promenljive** su simboli koji mogu predstavljati bilo koji element iz datog skupa, npr. $x, y, a, b, \alpha, \beta, L$
- **Operacijski znaci:**
 - *Algebarske operacije:* $+, -, *, /$.
 - *Logičke operacije:* $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$,
 - *skupovne operacije:* $U, I, \setminus, X, L$
- **Relacijski znaci** ρ : $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \perp, T, \dots$
- **Specijalni znaci:** $(,), [,], \{, \}, \exists, \forall, !, L$
- **Kvantifikatori:**
 - *Univerzalni kvantifikator:* $\forall$, ($\forall x$ čita se za svaki x)
 - *Egzistencijalni kvantifikator:* $\exists$, ($\exists x$ čita se postoji bar jedan x).
- **Matematičke formule** su rečenice koje se dobiju povezivanjem dva matematička izraza nekim od relacijskih simbola, npr. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \perp, T, \dots$

- **Izrazi** sadrže konstante, promenljive i operacijske znake:

Primer: $x+5$ je izraz. Izrazi u običnom jeziku su reči.

- **Formule** moraju da sadrže relacijski znak.

Primer: $x+3=9$ je formula. Formule su u običnom jeziku rečenice.

1.2 OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE LOGIKE

- **Iskazi** su formule koje imaju smisla i za koje se nedvosmisleno i jednoznačno može utvrditi da li su tačne ili netačne. Iskazi se obeležavaju malim slovima $p, q, r, \dots$ i nazivaju **iskazna slova**.

- Istinitosna vrednost iskaza je $\tau(p) = \begin{cases} 1, & p \text{ je tačan iskaz} \\ 0, & p \text{ je netačan iskaz} \end{cases}$

Umesto 1 i 0, koriste se i oznake T i $\perp$. Simbole 1 i 0 ne treba shvatati kao brojeve 1 i 0.

Primer: Rečenica $p: 3-1=2$ je iskaz i ima tačnu istinitosnu vrednost, $\tau(p)=1$.

Primer: Rečenica $3-1=-2$ je iskaz i ima netačnu istinitosnu vrednost, $\tau(p)=0$.

Primer: Rečenica $x^2=4$ nije iskaz jer nema tačnu istinitosnu vrednost. Za neke vrednosti promenljive x , tj za $x=\pm 2$ formula je tačna, a za sve ostale je netačna.

Osnovne logičke operacije su $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$, koje se nazivaju redom:

- **Konjunkcija** $\wedge$ (I, AND) je iskaz u oznaci $p \wedge q$ (čitamo p i q) koji je istinit akko su oba iskaza p i q istinita.
- **Disjunkcija** $\vee$ (ili, OR) je iskaz u oznaci $p \vee q$ koji je istinit akko je bar jedan od iskaza istinit, a neistinit samo ako su oba iskaza neistinita.
- **Implikacija** $\Rightarrow$ (ako onda) je netačan samo akko je iskaz p tačan a q netačan
- **Ekvivalencija** $\Leftrightarrow$ (ako i smo ako) je iskaz koji je tačan samo akko iskazi p i q imaju iste istinitosne vrednosti.
- **Negacija** $\neg$ (ne) je neistinit kada je p istinito i obrnuto..

Istinitosna vrednost logičkih operacija data je sledećom tablicom.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(\neg p)$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Primer: Formule su $(p \Rightarrow q) \wedge p$, $p \vee q \vee r$, $\neg p(p \Leftrightarrow q)$

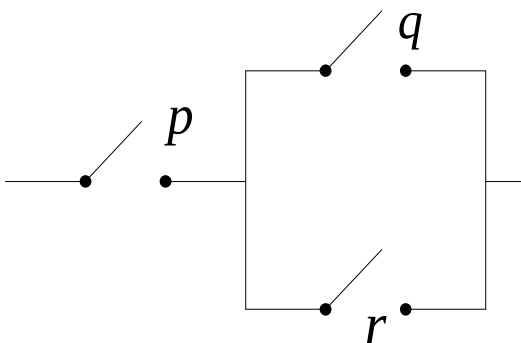
Istinitosna vrednost u tablici je u saglasnosti sa svakodnevnom logikom. Jedino kod implikacije naizgled nalogičnost vidimo u slučaju kada je $\tau(p) = 0$. Implikacija je tada tačna bez obzira na vrednost iskaznog slova q .

- Iskazna formula koja je uvek tačna naziva se **tautologija**. Ove formule u običnom jeziku zamenjuju zakone.
- Izkazne formule u kojima se pojavljuju samo operacije $\wedge, \vee, \neg$, pri čemu $\neg$ deluje samo na iskazna slova, imaju jednu zanimljivu interpretaciju koja se koristi u tehnici i naziva **prekidačka algebra**.
- Iskazna slova se tretiraju kao **normalno otvoreni prekidači**, a njihova negacija kao **normalno zatvoreni prekidači**. Ako iskazno slovo ima vrednost **1** smatra se da je prekidač zatvoren, tj. da provodi struju, a da je za $p = 0$ otvoren.



Formula se tretira kao mreža sa dva kraja sastavljena od prekidača koji su povezani paralelno ili serijski. Tautologijama odgovaraju mreže koje uvek provode struju.

Primer: Formuli $p \wedge (q \vee r)$ odgovara mreža



ZADACI:

1. Odrediti istinitosnu vrednost sledećih izraza:

$$(1 < 2) \wedge (2 < 5), (\forall x \in R) (x + 3 < 10), (\exists x \in R) (x + 3 < 10), (\exists x \in R) (x^2 = 1)$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\tau((1 < 2) \wedge (2 < 5)) &= T \wedge T = T & \tau((\forall x \in R) (x + 3 < 10)) &= \perp \\ \tau((\exists x \in R) (x + 3 < 10)) &= T & \tau((\exists x \in R) (x^2 = 1)) &= T\end{aligned}$$

2. Dati su iskazi $p \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{10}{3}$ i $q \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{37}{6}$,

$$r \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 7, s \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Odrediti njihovu tačnost i na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost sledećih izkaza:

$$(p \wedge q) \vee r, (p \vee q) \vee (r \wedge s), (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\tau(p) &= T, \tau(q) = T, \tau(r) = \perp, \tau(s) = \perp \\ \tau((p \wedge q) \vee r) &= (T \wedge T) \vee \perp = T \vee \perp = T \\ \tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) &= (T \vee T) \vee (\perp \vee \perp) = T \vee \perp = T \\ \tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) &= \perp \\ \tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) &= \perp\end{aligned}$$

3. Dati su iskazi $p \equiv (4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3$, $q \equiv (3x^4y^2)^2 : (3x^6y)^2 = 3xy^4$,

$$r \equiv (2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2 \text{ i } s \equiv (x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Odrediti njihovu tačnost i na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost sledećih izkaza:

$$(p \wedge q) \vee r, (p \vee q) \vee (r \wedge s), (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s), (p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \perp, \tau(q) = \perp, \tau(r) = T, \tau(s) = \perp \\ \tau((p \wedge q) \vee r) &= T \\ \tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) &= \perp \\ \tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) &= T \\ \tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) &= \perp\end{aligned}$$

4. Ispitati da li su iskazne formule tautologije:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q), \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q), (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p, (p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

Rešenje:

$\tau(p)$	$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(\neg q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(\neg(p \wedge q))$	$\tau(\neg p \vee \neg q)$	F
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ je tautologija ; $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p$ je taut., $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ je taut.

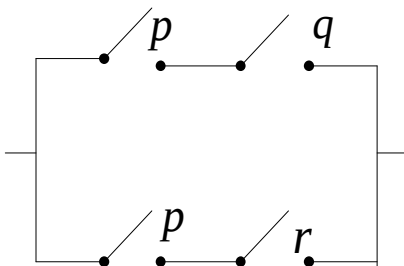
5. Dokazati da su sledeće formule tautologije

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ zakon komutacije; $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ De Morganov zakon

$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ zakon idempotencije; $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ zakon dvojne negacije

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$ zakon distribucije.

6. Formuli $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ odgovara mreža

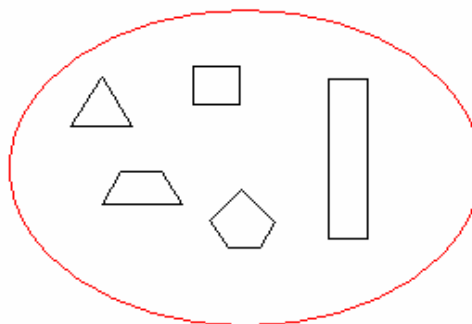


1.3 SKUPOVI I RELACIJE

- Kao što na pitanje “Šta je broj?”, tako ni na pitanje “Šta je skup?” ne možemo tako lako dati odgovor. Naime, obično kažemo da je pojam skupa jedan od osnovnih pojmova u matematici, onih koji se ne definišu.

- SKUP predstavlja kolekciju (mnoštvo) određenih i jasno definisanih objekata.

Objekti koji čine skup, ili koji pripadaju skupu, ili koji su sadržani u skupu, nazivaju se njegovi **ELEMENTI**, ili njegovi članovi.



Slika 1. Elementi skupa

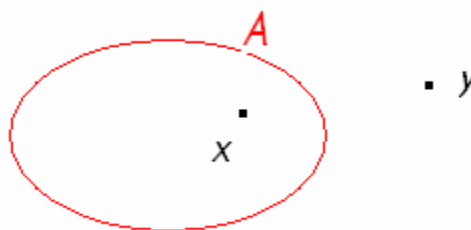
- Skupovi se označavaju velikim slovima A, B, C, X, Y, ..., a elementi skupa malim a, b, c, x, y, ...

Znanja o skupovima stičemo posredno, upoznajući najpre neke relacije

($\in$, $=$, $\subset$) i

operacije ($\cap$, $\cup$, $'$, Δ , $\times$) sa skupovima.

- “ $\in$ ” je skraćenica za iskaze
“je element”, ili
“pripada”, ili
“sadržan je”.



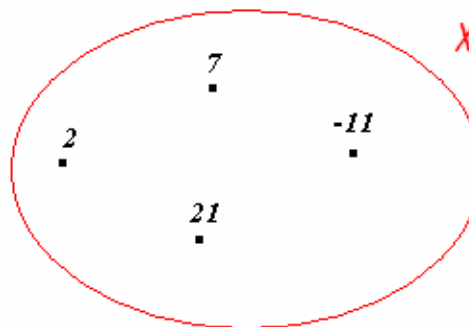
$x \in A$: (element) x pripada (skupu) A

$y \notin A$: (element) y ne pripada (skupu) A ili $\neg (y \in A)$

Predstavljanje skupova

- Nabranjanjem elemenata, $X = \{ 2, 7, -11, 21 \}$
- Opisom osobine **P** koju elementi x zadovoljavaju
- Venovim dijagramom

Primer: $X = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 9 \}$



Kodirana skraćenica

$A = \{ x \in P \mid p(x) \}$

se prevodi na sledeći način:

kod

A

=

{ }

$x \in P$

|

$p(x)$

značenje

skup

je

skup koji sadrži

sve elemente x iz P

takve da je

uslov $p(x)$ zadovoljen

Primeri:

♦ $\mathbb{Z}$ je skup celih brojeva $\{ -2, 2 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4 \}$

♦ $\mathbb{N}$ je skup prirodnih brojeva $\{ 1, 2, 3 \} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 4 \}$

- **Prazan skup** – nema elemenata, oznaka: $\emptyset = \{ \}$

Jednakost skupova

- Skupovi A i B su **jednaki** ako je svaki element skupa A takođe i element skupa B i svaki element skupa B takođe i element skupa A .

$$A = B \text{ akko } (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

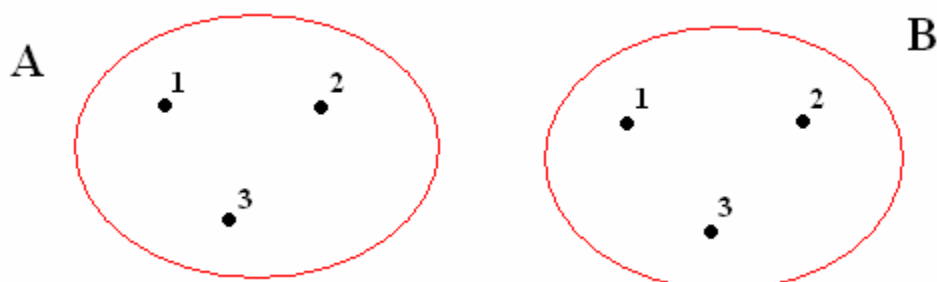
- Jednakost skupova A i B označava se $A = B$
- Ako skupovi A i B nisu jednaki, piše se $A \neq B$.

Primeri: 1) $\{5, 1\} = \{1, 5\}$

Elementi skupa mogu biti navedeni proizvoljnim redom.

2) $\{5, 1\} = \{5, 1, 1\}$ 1 i 1 nisu različiti – to je isti element

3) $\emptyset \neq \{0\}$; $\{\} \neq \{0\}$

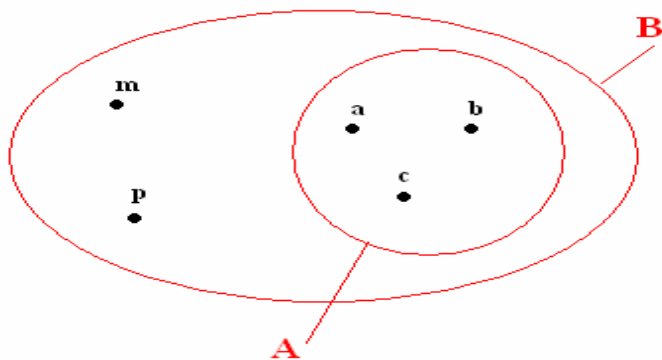


$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$$

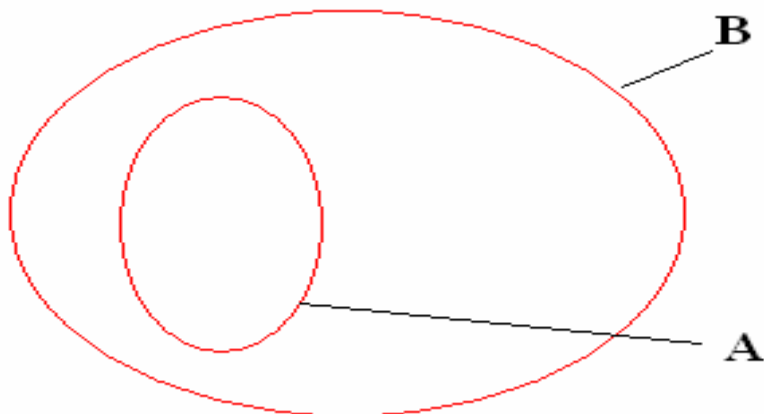
Podskup

$A \subset B$ akko $(\forall x)(x \in A \implies x \in B)$ relacija inkluzije

- Skup A je **podskup** skupa B (skup A je sadržan u skupu B , oznaka za to je $A \subset B$ ili $B \supset A$) ako je svaki element skupa A takođe element skupa B .



- Ako je $A \subset B$ i $A \neq B$, skup A je **pravi** podskup skupa B .



- **Prazan** skup je podskup svakog skupa. npr: $\{ x \mid x \neq x \} = \emptyset$

Primer: $\{ 1, 5 \} \subset \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

- $A \subset A$; $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$; $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

** Partitivni skup skupa A*

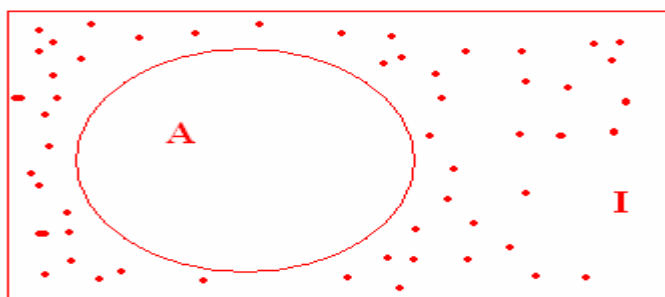
(tj. skup svih podskupova skupa A) u oznaci $P(A)$, će biti $\{ X \mid X \subseteq A \}$

Primer: Odrediti sve partitivne skupove sledećeg skupa $C = \{ a, b, c \}$

Rešenje: $P(C) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, C \}$.

** Univerzalni skup*

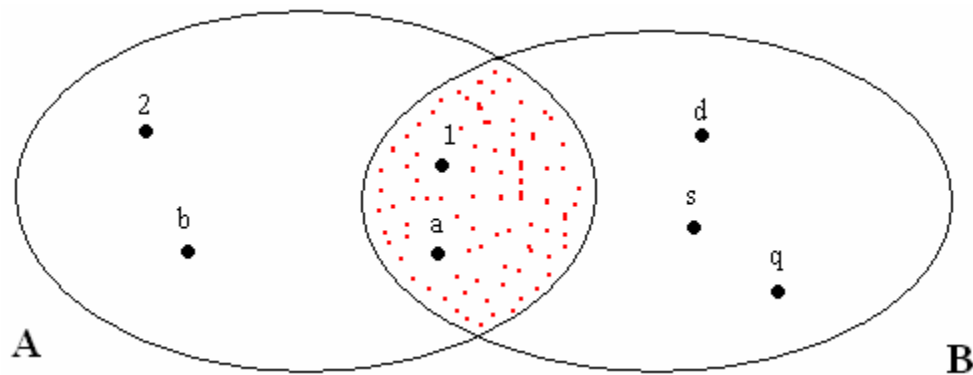
- I je skup koji sadrži sve elemente koji se posmatraju.
- Za svaki skup A je $A \subset I$.



Osnovne skupovne operacije

- **Presek skupova** A i B je skup

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$



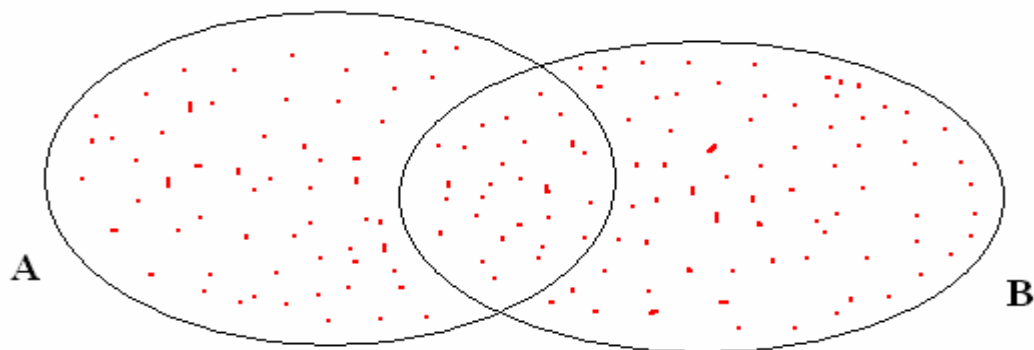
$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Primer: $A = \{ 1, a, 2, b \};$ $B = \{ 1, d, a, s, q \};$

$$A \cap B = \{ 1, a \}$$

• *Unija skupova* A i B je skup

$$A \cup B = \{ x | x \in A \vee x \in B \}$$



$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Primer:

$$A = \{ 1, a, 2, b \}$$

$$B = \{ 1, d, a, s, q \}$$

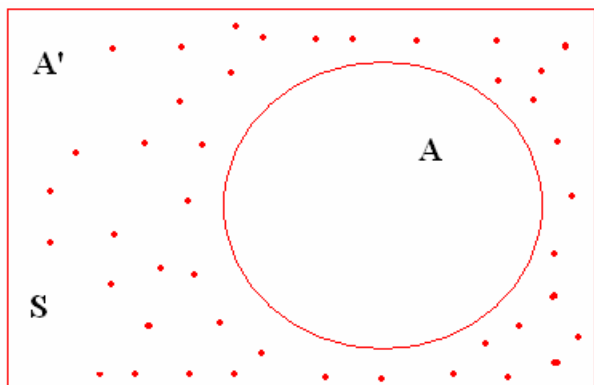
$$A \cup B = \{ 1, a, 2, b, d, s, q \}$$

• *Komplement skupa A*

Neka je A podskup nekog skupa S.

Sa $C_S(A)$ (ili samo A' ako je skup S unapred dogovoren)

označićemo **komplement** skupa A u odnosu na S.



$$C_S(A) = A' = \{ x \mid x \in S \wedge x \notin A \}$$

$$x \in A' \iff \neg (x \in A)$$

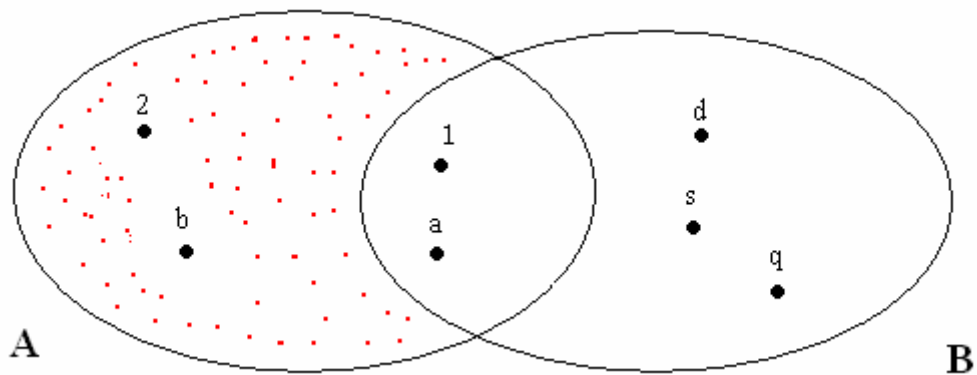
- **Razlika skupova** A i B je skup $A \setminus B$

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge \neg (x \in B)$$

primećujemo da je

$$C_S(A) = S \setminus A$$



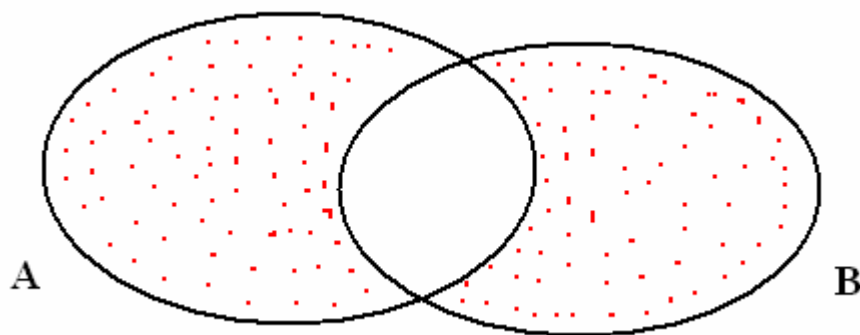
Primer: $A = \{ 1, a, 2, b \}, B = \{ 1, d, a, s, q \}$

$$A \setminus B = \{ 2, b \}$$

- **Simetrična razlika** skupova A i B je skup

$$A \Delta B = \{ x \mid x \in A \wedge \neg (x \in B) \vee x \in B \wedge \neg (x \in A) \}$$

$$x \in A \Delta B \iff x \in A \wedge \neg (x \in B) \vee x \in B \wedge \neg (x \in A)$$



$$A \Delta B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$$

Primenom *TAUTOLOGIJA* jednostavno se dokazuju izvesne relacije sa skupovima.
Pomenimo neke najvažnije:

T: Za skupove A, B i C važi:

1° $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ zakon idempotencije

2° $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ zakon komutacije

3° $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ zakon asocijacije

4° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ zakon distribucije

5° $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

6° $A \cap A' = \emptyset$

7° $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,
 $A \cup \emptyset = A$, $A \Delta A = \emptyset$

8° $A \Delta B = B \Delta A$, $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

9° $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ zakon apsorpcije

10° $(A^c)^c = A$ zakon dvojne negacije

Dokaz : Radi ilustracije dokazaćemo prvo od tvrđenja 1°, drugo od tvrđenja 4° i prvo od tvrđenja 8°. Preostala tvrđenja dokazuju se na sličan način.

(i) $A \cup A = A$, $x \in A \cup A \iff x \in A \vee x \in A \iff x \in A$;

(ii) $A \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow \\
 x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad x \in A \Delta B &\Leftrightarrow x \in A \quad \overline{\bigvee} x \in B \\
 &\Leftrightarrow x \in B \quad \overline{\bigvee} x \in A \\
 &\Leftrightarrow x \in B \Delta A
 \end{aligned}$$

Značajna algebarska svojstva relacija i operacija među skupovima

- **Refleksivnost** jednakosti i inkluzije

$$A = A \quad \text{i} \quad A \subseteq A$$

- **Simetričnost** jednakosti

$$\text{Ako } A = B, \text{ onda } B = A$$

- **Antisimetričnost** inkluzije

$$A \subseteq B \quad \text{i} \quad B \subseteq A \quad \text{akko} \quad A = B$$

- **Tranzitivnost** jednakosti i inkluzije

$$\text{Ako } A = B \quad \text{i} \quad B = C, \text{ onda } A = C \quad \text{Ako}$$

$$A \subseteq B \quad \text{i} \quad B \subseteq C, \text{ onda } A \subseteq C$$

- **De Morganovi zakoni :**

$$(1) \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$(2) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

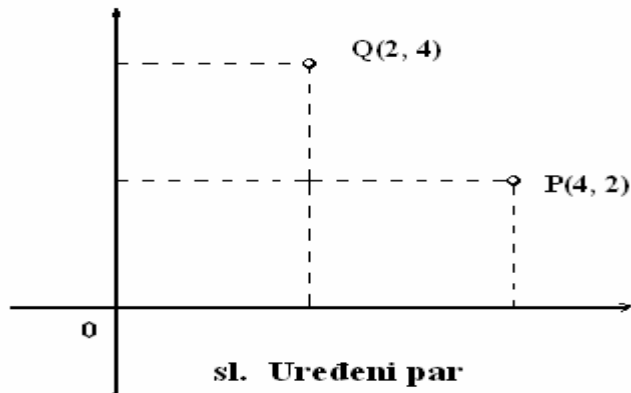
$$(3) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(4) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Dekartov proizvod

- * **Uređeni par**, čija je prva komponenta a , a druga b , obeležava se sa (a, b) Uređeni parovi

(a, b) i (c, d) jednaki su ako i samo ako je
 $a = c$ i $b = d$.



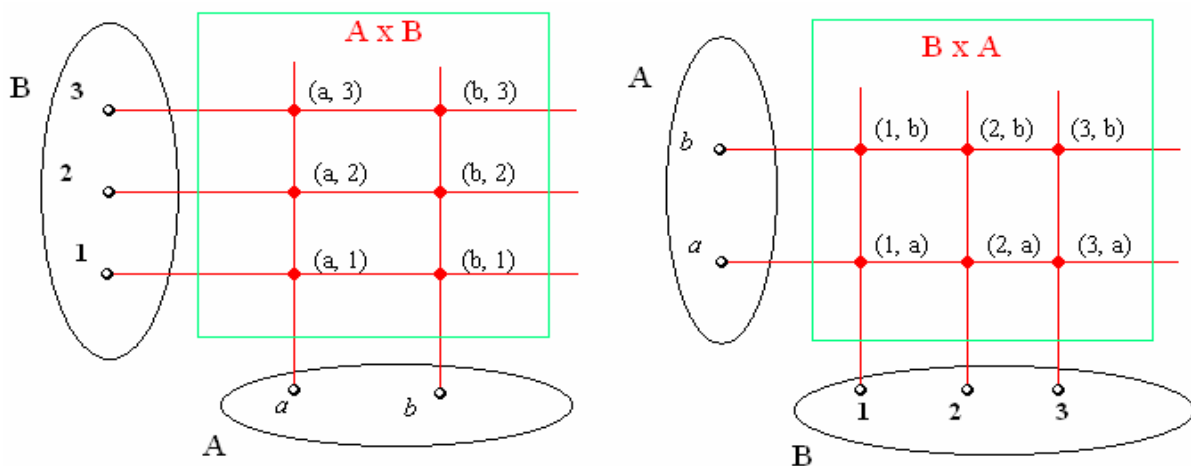
Uređena n -torka se označava sa $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, a jednakost uređenih n -torki elemenata definisana je sa :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

* **Dekartov proizvod** skupova A i B , $A \times B = \{ (x, y) | x \in A \wedge y \in B \}$

Primer: Ako je $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, onda će biti
 $A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
 $B \times A = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

Grafički se to može ovako predstaviti :



Zaključak : $A \times B \neq B \times A$

- Dakle, za Dekartov proizvod imamo :
 $A \times B \neq B \times A$

- S druge strane, važe distributivni zakoni $\times$ prema $\cap$ i $\cup$.

$$\begin{aligned} T: \quad & 1) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\ & 2) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \\ & 3) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \\ & 4) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

- Dekartov proizvod n skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$ je

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

$$\begin{aligned} \text{Dekartovi proizvodi:} \quad A \times A &= A^2 \\ A \times A \times A &= A^3 \end{aligned}$$

Relacije

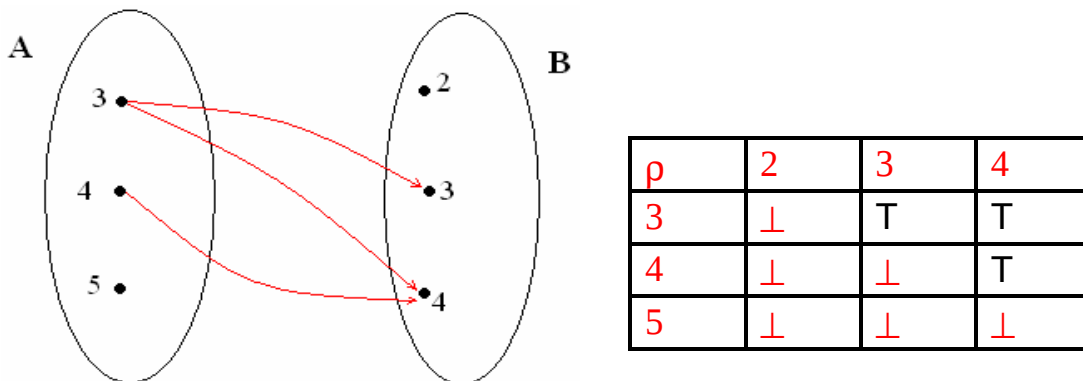
- Oznake relacija :
 - 1) za skupove $=, \subset, \in$
 - 2) u geometriji $\cong, <, \parallel, \perp$
 - 3) u algebri $\leq, >, |$

Ovo su primeri relacija koje ukazuju na određene odnose među :

- skupovima ;
- geometrijskim figurama ;
- brojevima ...

- Relacije nam ukazuju na određene odnose među matematičkim objektima. Prvi i bitan korak od pojma **IZRAZA** ka pojmu **ISKAZA** ili matematičke formule, pravimo uz pomoć relacije.

Kako se relacija može posmatrati kao neko povezivanje elemenata nekog skupa A sa elementima skupa B za koje je važno da se zna koji elementi skupa A su u vezi, u relaciji, sa kojim elementima skupa B , to se jedna takva relacija u potpunosti može zadati na sledeći način : ako $x \in A$ i $y \in B$ i ,



pri tom su x i y u datoj relaciji, onda uređenom paru $(x, y) \in A \times B$ pridružujemo

vrednost $\top$, a ako to nije slučaj, onda uređenom paru (x, y) pridružujemo $\perp$. Dakle, relacija zapravo razdvaja one uređene parove elemenata skupova A i B za koje kažemo da **jesu**, od onih za koje kažemo da **nisu** u toj relaciji. Stoga se jedna relacija među elementima skupova A i B može zadati i kao podskup Dekartovog proizvoda $A \times B$ uređenih parova onih elemenata koji **jesu** u datoj relaciji.

D: **Relacija** je bilo koji podskup Dekartovog proizvoda skupova.

Ako je $\rho \subset A \times B$ i $(x, y) \in \rho$

kažemo da je x u relaciji ρ sa y , što još označavamo sa $x \rho y$.

Jedna relacija ρ , nad konačnim skupom elemenata se može zadati neposrednim nabranjem uređenih parova koji jesu u toj relaciji pomoću

tablice. Ako $(x, y) \in \rho$, tj. ako $x \rho y$, onda u tablici na mestu gde se sececaju vrsta u kojoj se nalazi x i kolona u kojoj se nalazi y , pišemo $\top$, a ukoliko $(x, y) \notin \rho$, tj. ako nije $x \rho y$, onda tamo pišemo $\perp$.

Primer : Relaciji $\rho = \{ (1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4) \}$ odgovara sledeća tablica

ρ	1	2	3	4
1	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
2	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

- Mi ćemo se baviti najčešće **binarnim relacijama** u skupu $A \times B$, a to je svaki njegov podskup.

$$(a, b) \in \rho \iff a \rho b$$

$$(a, b) \notin \rho \iff \neg(a \rho b)$$

Binarne relacije

Binarna relacija ρ u skupu A je :

$$R \text{ (refleksivna)} \iff (\forall a \in A)(a \rho a)$$

$$AR \text{ (antirefleksivna)} \iff (\forall a \in A) \neg(a \rho a)$$

$$S \text{ (simetrična)} \iff (\forall a, b \in A) a \rho b \implies b \rho a$$

$$AS \text{ (antisimetrična)} \iff (\forall a, b \in A)(a \rho b \wedge b \rho a) \implies a = b$$

$$T \text{ (tranzitivna)} \iff (\forall a, b, c \in A)(a \rho b \wedge b \rho c) \implies a \rho c$$

Relacije ekvivalencije i poretka

- Relacija ekvivalencije je binarna relacija koja je R, S i T
 - Relacija poretka je binarna relacija koja je R, AS i T
i označava se sa $\leq$
 - Relacija strogog poretka je binarna relacija koja je AR, AS, i T
i označava se sa $<$
-
- **Inverzna relacija** relacije ρ je relacija

$$\rho^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in \rho \}$$

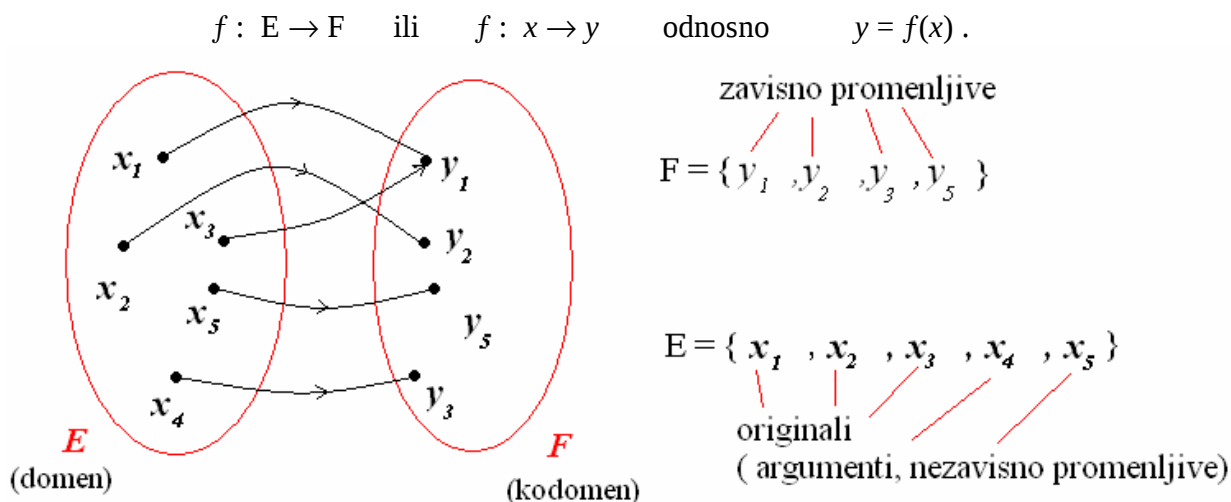
- **Kompozicija relacija** (proizvod relacija)

$$\rho_1 \subset A \times B \quad \text{ i } \quad \rho_2 \subset B \times C$$

je relacija.

1.4 FUNKCIJA (kao preslikavanje skupova)

Neka su E i F neprazni skupovi. Ako po nekom pravilu f svakom elementu x skupa E odgovara po **jedan**, tačno određeni element y skupa F , tada kažemo da je f **preslikavanje** koje prevodi elemente skupa E u elemente skupa F - pišemo :



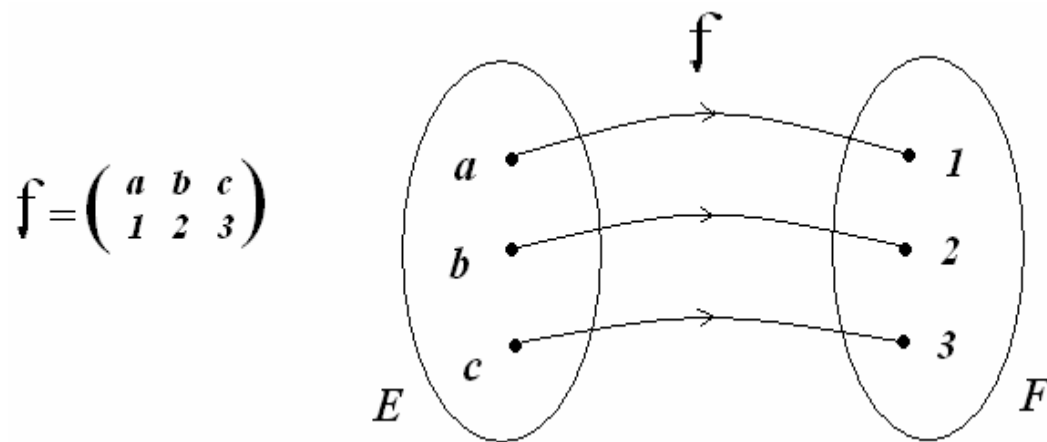
Ako svakom elementu y iz skupa F (kodomena) odgovara bar jedan element x iz skupa E (domena), onda je ova funkcija **surjekcija** (preslikavanje NA).

D1 : Preslikavanje f skupa E u skup F je podskup Dekartovog proizvoda $E \times F$, takav da su ispunjeni uslovi :

- 1° skup svih prvih komponenti uređenih parova $(x, y) \in f$ jednak je skupu E ;
- 2° ako $(x_1, y_1) \in f$ i $(x_1, y_2) \in f$, tada je $y_1 = y_2$. Umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$.

Primer : Neka je $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3\}$ i $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

Preslikavanje $f: E \rightarrow F$ pišemo u obliku



Ovakvo preslikavanje tipa jedan na jedan (1-1), zove se **injekcija**.

Funkcija je **bijekcija** kada je istovremeno i surjekcija i injekcija.

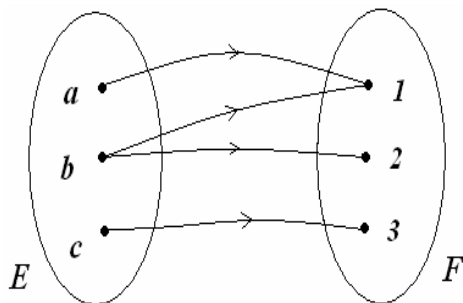
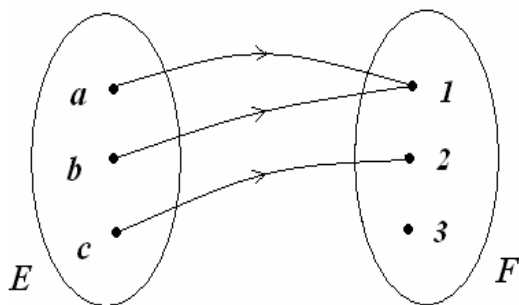
Primer : Da li su relacije

$$\rho_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\},$$

$$\rho_2 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 3)\} \text{ i}$$

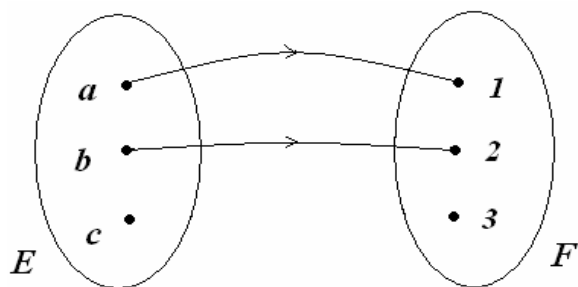
$$\rho_3 = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

preslikavanja skupa $E = \{a, b, c\}$ u skup $F = \{1, 2, 3\}$?



ρ_1 : jeste preslikavanje jer svakom elementu skupa E odgovara tačno jedna slika.

ρ_2 : **nije preslikavanje** jer elementu b odgovaraju dva elementa.



ρ_3 : nije preslikavanje jer elementu c ne odgovara nijedan element skupa F .

Primer : Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2x + 1) = 3x - 2$. Naći $f(x)$.

Rešenje : $f(2x + 1) = 3x - 2$ označimo $2x + 1 = t$.

Tada je $x = (t - 1) \setminus 2$

$$f(t) = 3(t - 1) \setminus 2 - 2 = \dots = (3t - 7) \setminus 2$$

pa je i $f(x) = (3x - 7) \setminus 2$

Def : Neka je $f: E \rightarrow F$. Ako je za sve elemente $x_1, x_2 \in E$ ispunjen uslov
 $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

(ili, što je isto: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$), tada se kaže da je f **1-1** preslikavanje.

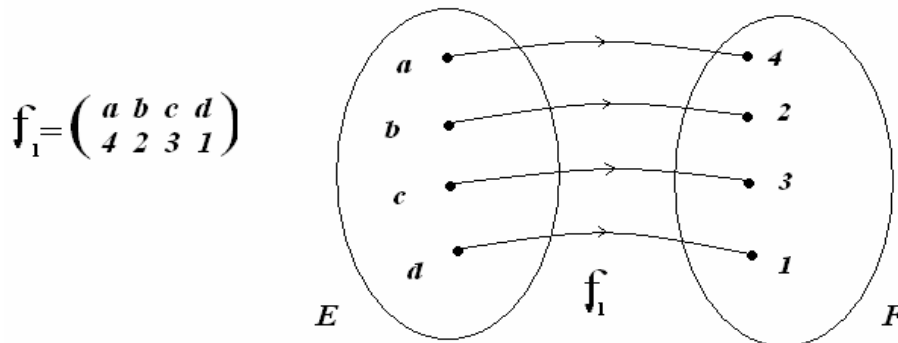
Def : Neka je $f: E \rightarrow F$. Ako je ispunjen uslov

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x)),$$

tada se kaže da je f **NA** preslikavanje.

Primeri : 1° Neka je $E = \{a, b, c, d\}$ i $F = \{1, 2, 3, 4\}$.

Posmatrajmo preslikavanja

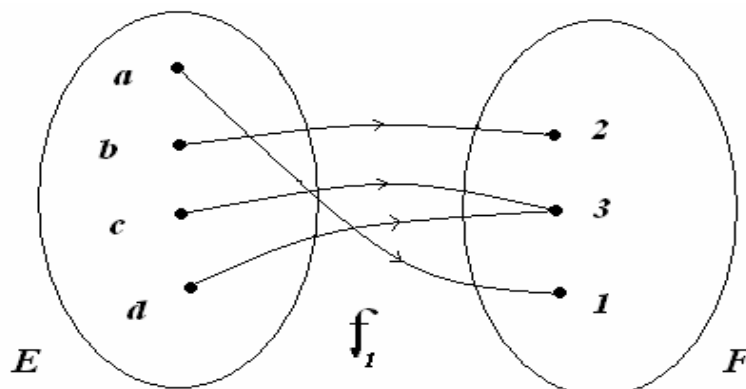


$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1-1 i NA (bijektivno preslikavanje)

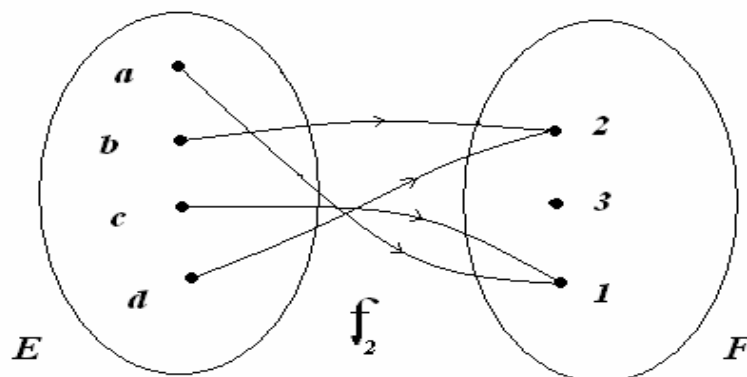
2° Neka je $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3\}$. Posmatrajmo preslikavanja

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$



jeste NA ali nije 1-1 preslikavanje

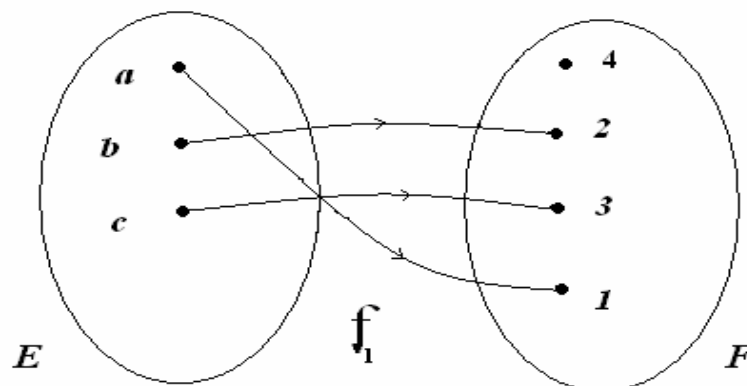
$$f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



nije ni 1-1 ni NA preslikavanje

3° Neka je $E = \{a, b, c\}$ i $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Posmatrajmo preslikavanja

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



jeste 1-1 ali nije NA preslikavanje

2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI

Broj je jedan od osnovnih matematičkih pojmova. Nastao je iz potrebe za prebrojavanjem, odnosno određivanjem broja elemenata nekog skupa. Na taj način se prvo operisalo sa skupom prirodnih brojeva.

Broj kao osnovni pojam se ne definiše (intuitivno se shvata), već se proučavaju njegove osobine i operacije.

Sve do 19 veka teorija brojeva se razvijala uglavnom zbog praktičnih problema. Tokom 19 i 20 veka teorija brojeva se aksiomatizuje. 1900 godine Hilbert je aksiomatski definisao skup realih brojeva.

2.1 SKUP REALNIH BROJEVA (R)

Osnovna podela skupova brojeva je na realne i kompleksne.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1 - Skup realnih brojeva: | R |
| a) Skup prirodnih brojeva | N , (Skup prirodnih brojeva i $0 \in N_0$) |
| b) Skup celih brojeva | Z |
| v) Skup racionalnih brojeva | Q |
| g) Skup iracionalnih brojeva | I |
| 2 - Skup kompleksnih brojeva | C |

Skupovi: N, Z, Q i I su podskupovi skupa realnih brojeva R

2.1.1 SKUP PRIRODNIH BROJEVA (N)

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

- Za svaki broj $n \in N$ postoji broj $n+1 \in N$. Brojevi n i $n+1$ su **uzastopni** ili **sukcesivni** brojevi.
- Skup prirodnih brojeva N je **ograničen** sa donje strane, a **nije ograničen** sa gornje strane, tj. postoji najmanji prirodni broj 1, a ne postoji najveći.
- Prirodan broj čiji su jedini činioci on sam i broj 1, zovemo **prostim brojem**, napr 2, 3, 5, 7, 11, ... **Uzajamno prostim** brojevima nazivamo dva prirodna broja ako im je jedini zajednički činioc broj 1.
- Prirodni broj je **paran** ako mu je bar jedan prost činioc broj 2. Ako to nije slučaj broj je **neparan**. Parne brojeve obeležavamo sa $2k$, a neparne sa $2k+1$ ili $2k-1$

- Skup prirodnih brojeva je **zatvoren** u odnosu na operacije sabiranja i množenja (ove operacije su definisane na ovom skupu), tj. rezultat sabiranja i množenja dva prirodna broja je uvek prirodan broj.
- Za operacije sabiranja i množenja prirodnih brojeva važe zakoni:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba \quad \textbf{komutativnosti}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab) \cdot c = a(bc) \quad \textbf{asocijativnosti}$$

$$(a + b) \cdot c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac \quad \textbf{distributivnosti.}$$
- **Neutralni element** za množenje je 1: $\forall n \in N, \quad n \cdot 1 = n$.
- **Stepen** prirodnog broja definišemo kao

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Na osnovu definicije stepena zaključujemo uz uslov : $(a, n, m) \in N$ i $n > m$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

2.1.2 SKUP CELIH BROJEVA (Z)

Operacija oduzimanja se u skupu prirodnih brojeva ne može uvek definisati. **Razlika** dva prirodna broja ne mora da bude prirodan broj. To dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva N na skup celih brojeva Z .

- **Oduzimanje** u skupu celih brojeva je operacija koje se definiše:

$$\forall a, b, c \in Z, \quad a - b = c \Rightarrow a = b + c$$

- Skup **celih brojeva** sadrži sve prirodne brojeve, nulu i brojeve oblika $-n, n \in N$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$$

- Skup Z je nadskup skupa N i zadržava sva pravila koja smo definisali u skupu N , dodajući nova pravila koja važe samo u skupu Z . Ovaj princip koristimo i u definisanju narednih proširenja skupova brojeva i zove se **princip permanencije**.
- Skup celih brojeva je **neograničen** kako s donje tako i s gornje strane, tj. u skupu Z ne postoji ni najmanji ni najveći ceo broj.
- **Neutralni element** za sabiranje je 0, a neutralni element za množenje je 1, tj. $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in Z$.

- Za svaki ceo broj $a \in \mathbb{Z}$ postoji **suprotan broj** $-a \in \mathbb{Z}$ takav da, ako je $a + (-a) = 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

2.1.3 SKUP RACIONALNIH BROJEVA ($\mathbb{Q}$)

Potreba numeričkog izražavanja rezultata merenja, odnosno nemogućnost potpunog definisanja operacije deljenja, zahtevala je uvođenje pojma razlomka.

- Skup **racionalnih brojeva** je skup dobijen deljenjem celog broja prirodnim brojem (ili celim brojem osim nule):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$$

Operacija deljenja se u skupu celih brojeva ne može uvek definisati, tj. količnik dva cela broja ne mora da bude ceo broj, što dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva $\mathbb{Z}$ na skup **racionalnih brojeva** $\mathbb{Q}$.

- **Deljenje** celih brojeva definišemo na sledeći način

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0, \quad \frac{a}{b} = c \Rightarrow a = b \cdot c$$

- Skup racionalnih brojeva je **neograničen** s obe strane, tj. ne postoji ni najmanji ni najveći racionalan broj.
- Skup racionalnih brojeva je **svugde gust** skup, što znači da između svaka dva racionalana broja $a, b \in \mathbb{Q}$ postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.
- Skup racionalnih brojeva je **prebrojiv** tj. između tog skupa i skupa prirodnih brojeva može se uspostaviti obostrano jednoznačna veza.
- **Neutralni element** za sabiranje je 0, a **neutralni element** za množenje je 1, tj. $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.
- Za svaki racionalan broj $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, postoji **inverzni element** za množenje a^{-1} takav da je $a \cdot a^{-1} = 1$.

2.1.4 SKUP IRACIONALNIH BROJEVA ($\mathbb{I}$)

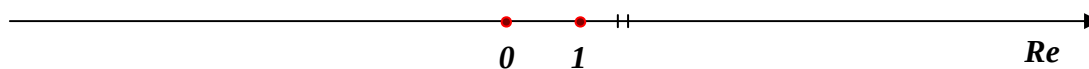
Stari Pitagorejci su došli do saznanja da su stranica i dijagonala kvadrata nesamerljive duži, tj. da nemaju zajedničku meru. Dužina hipotenuze pravouglog trougla stranice 1 iznosi $\sqrt{2}$. Međutim broj $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Na taj način dolazimo do novog proširenja skupova brojeva, tj do **iracionalnog broja**.

- Broj koji se ne može predstaviti u obliku razlomka nazivamo **iracionalnim brojem** napr $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, L$

2.1.5 SKUP REALNIH BROJEVA

- Svi racionalni i svi iracionalni brojevi obrazuju skup **realnih brojeva** $R = Q \cup I$.
- Skup realnih brojeva je **neprebrojiv** skup.

Realne brojeve često predstavljamo tačkama na **brojnoj osi** ili realnoj osi tako što kažemo da svakoj tački brojne ose odgovara jedan realan broj i obrnuto.



Ako uvedemo srtožije definicije od predhodno navedenih imamo sledeće:

- Kažemo da je skup $X \subset R$, **ograničen s gornje strane** ako postoji realan broj $M \in R$ takav da je $x \leq M, \forall x \in X$.
- Najmanji od gornjih ograničenja skupa X nazivamo **supremum** skupa.
- Za skup $X \subset R$ kaže se da je **ograničen odozdo** ako postoji takav realan broj $m \in R$ da je $m \leq x, \forall x \in X$.
- Najveći od donjih ograničenja skupa X naziva se **infimum** skupa.
- Na skupu realnih brojeva za nejednakosti važe sledeće osobine:

$$(a > b) \Leftrightarrow (b < a)$$

$$(a > b) \Leftrightarrow (a + c > b + c)$$

$$(a > b, c > 0) \Rightarrow (ac > bc), (a > b, c < 0) \Rightarrow (ac < bc)$$

- Realni brojevi se mogu predstaviti kao tačke na brojnoj pravi.
- Na skupu realnih brojeva definisane su sve računске operacije osim parnog korena iz negativnog broja.

Apsolutna vrednost broja

- Ako je $a \in R$ proizvoljan realan broj, tada je **apsolutna vrednost** broja a :

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

- Za **apsolutnu vrednost** broja a važe sledeća pravila:

$$|a| = |-a|, \quad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \quad |a| > b \Rightarrow a > b \text{ ili } a < -b$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad |a-b| \leq |a| + |b| \quad |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Proširenje skupa realnih brojeva

- Skup realnih brojeva proširuje se sa dva simbola $-\infty$ i $+\infty$, tako da za svaki $a \in R$ važi nejednakost: $-\infty < a < +\infty$.

- Za operacije sa ovim simbolima važe pravila:

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= +\infty & a + (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty & a + (-\infty) &= -\infty, & a \in R \end{aligned}$$

za $a > 0$

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty & a \cdot (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty & (+\infty) \cdot (-\infty) &= -\infty & a \cdot (-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

Izrazi $(+\infty) - (+\infty)$ $\frac{+\infty}{\mp\infty}$ nisu definisani.

Interval u skupu realnih brojeva

- Ako su $a, b \in R$, takvi da je $a < b$ sledeći podskupovi nazivaju se

otvoren interval $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

zatvoren interval $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

polu-otvoren interval tj. **polu-zatvoren interval** $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$,
 $(a, b] = \{a < x \leq b\}$

2.2 SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA (C)

Skup svih kompleksnih brojeva C je skup uređenih parova $z = (x, y)$ realnih brojeva.

Prvi broj pripada apscisi (Realnoj osi), a drugi pripada ordinatnoj osi (ili tzv. Imaginarnoj osi).

To znači da kompleksnom broju pripada tačka u ravni koju čine realna i imaginarna osa.

Do pojma kompleksnog broja dolazimo ako pokušamo da rešimo jednačine tipa $x^2 + a^2 = 0$, gde su oba sabirka pozitivna tj. $x, a \in R$.

U skupu realnih brojeva jednačina $x^2 + 1 = 0$ nema rešenja.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Jasno je da ne postoji realan broj čiji je kvadrat negativan broj.

Da bismo mogli da rešimo ovu jednačinu moramo skup realnih brojeva proširiti na skup **kompleksnih** brojeva uz uvođenje oznake broja koji odgovara broju $\sqrt{-1}$.

- Taj broj je $i = \sqrt{-1}$ **imaginarna jedinica**.

Rešenje pomenute jednačine postaje $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

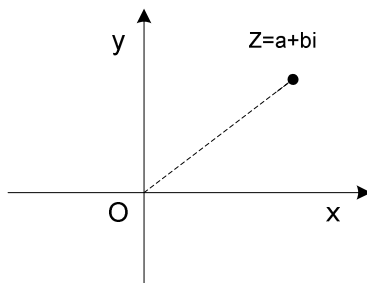
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^{4n+k} = i^k, n \in N, k = 1, 2, 3$$

Svakoј tački na apscisnoj-osi (realnoj osi) odgovara jedan realan broj (a), a svakoј tački na ordinatnoj osi (imaginarnoj osi) odgovara jedan imaginaran broj (bi).

- Skup svih uređenih parova realnih brojeva (a, b) u kojem je $z = a + ib$, tj. $z = (a, b)$ naziva se skupom **kompleksnih brojeva** C , gde je $i = \sqrt{-1}$.



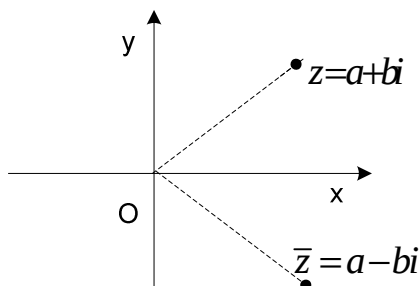
slika 1

Kompleksni brojevi mogu se predstaviti kao tačke u kompleksnoj ravni.

- **Realni deo** kompleksnog broja je $\text{Re}\{z\} = a$,
- **Imaginarni deo** $\text{Im}\{z\} = b$

Ako je $\text{Re}\{z\} = 0$, kompleksni broj je **čisto imaginarni broj**, ako je $\text{Im}\{z\} = 0$, kompleksni broj je **realan broj**.

- Dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + ib_1$ i $z_2 = a_2 + ib_2$ su **jednaka** ako su im jednaki realni delovi za sebe, a imaginarni za sebe. tj. $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.
- Svakom kompleksnom broju $z = a + ib$ odgovara **konjugovano kompleksni broj** u oznaci $\bar{z} = a - ib$.



slika 2

Primer:

Konjugovano kompleksni broj, broju $z = 2 - i$ je kompleksni broj $\bar{z} = 2 + i$.

- **Modul kompleksnog broja** $z = a + ib$ definiše se kao $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On geometrijski predstavlja udaljenost broja z (odnosno tačke $M(a, b)$) od koordinatnog početka

Primer:

Modul kompleksnog broja $z = 2 + i$ iznosi $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Napomena: Uzimali smo realne brojeve x ili a za $\operatorname{Re}(z)$, a brojeve y ili b za $\operatorname{Im}(z)$, što ne utiče na važnost zaključaka.

2.2.1 OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA U ALGEBARSKOM OBLIKU

Za kompleksne brojeve kao uređene parove vrede sledeće aksiome:

1⁰ Aksioma sabiranja: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2⁰ Aksioma množenja: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
ili pojednostavljeno definišemo operacije sa kompleksnim brojevima.

Neka su data dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + ib_1$ i $z_2 = a_2 + ib_2$.

- **Sabiranje:** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- **Oduzimanje:** $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
- **Množenje:** $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$
- **Deljenje:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$

Primer: Neka su data dva kompleksna broja $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 2 - 3i$.

$$z_1 + z_2 = 1 + 2i + 2 - 3i = 3 - i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i - (2 - 3i) = -1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} = \frac{1 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$$

- **Stepenovanje** kompleksnog broja prirodnim brojem se izvodi pomoću operacije množenja $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ puta}}, n \in \mathbb{N}$

Napomena: Imamo da je $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$; uopšte:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

Primer: Naći $i^{2004} = (i^4)^{501} = 1^{501} = 1$

ZADACI

1. Rešiti kvadratnu jednačinu $x^2 + 4 = 0$.

Rešenje

$$x_1 = 2i, x_2 = -2i$$

2. Rešiti kvadratnu jednačinu $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Rešenje:

$$x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$$

3. Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja $z = \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i)$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i) = \frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \cdot (3+2i) = \frac{2+3i+i^2}{4-i^2} \cdot (3+2i) = \\ &= \frac{1+3i}{5} \cdot (3+2i) = \frac{-3+11i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

4. Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Rešenje:

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{-2i}{1-i^2}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

5. Dokazati da je $z = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2$ čisto imaginaran broj.

Rešenje:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{2-i} - \frac{2-i}{2+i}\right) \cdot \left(\frac{2-i}{2+i} + \frac{2-i}{2+i}\right) = \\ &= \frac{(2+i)^2 - (2-i)^2}{5} \cdot \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{5} = \frac{8i}{5} \cdot \frac{8+2i^2}{5} = \frac{8i \cdot 6}{25} = \frac{48i}{25} \end{aligned}$$

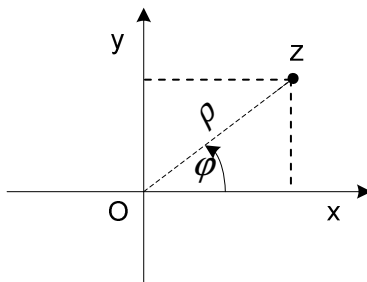
2.2.2 TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNIH BROJEVA I OPERACIJE SA NJIMA

- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja je:

$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gde je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$.

gde je:

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je **modul**, a, φ je **argument** kompleksnog broja (pri čemu je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$) i obeležava se $\varphi = \operatorname{Arg} z$. (slika 3).



slika 3

Argument kompleksnog broja nije jednoznačno određen. Imajući u vidu periodičnost trigonometrijskih funkcija, argument je svaki realni broj oblika $\varphi + 2k\pi$, gde je $k \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, broj φ koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ naziva se **glavni argument**.

Primer:

Kompleksan broj $z = 1 + i$ napisati u trigonometrijskom obliku.

Moduo datog kompleksnog broja je $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, a argument je $\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, pa

je trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Neka su data dva kompleksna broja $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ i $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva u algebarskom obliku je jednostavnije nego u trigonometrijskom obliku.

▪ Množenje:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\text{▪ Deljenje: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

- **Stepenovanje:** $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Ovo je **Moavrova formula** za stepenovanje.

Moavrova formula se može dokazati primenom matematičke indukcije.

Primer:

Koristeći Moavrovu formulu za stepenovanje kompleksnih brojeva odrediti z^4 , ako je $z = -1 - i$.

Modul datog kompleksnog broja je $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, a argument je

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$ zato što ugao pripada trećem kvadrantu, pa trigonometrijski oblik broja

$z = -1 - i$ je $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$. Sada imamo da je:

$$z^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos 4 \cdot \frac{5\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{5\pi}{4} \right) = 4(\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -4$$

- **Koren** kompleksnog broja

Svako rešenje jednačine $z = \omega^n$, gde je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, a $\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, definiše se kao koren kompleksnog broja

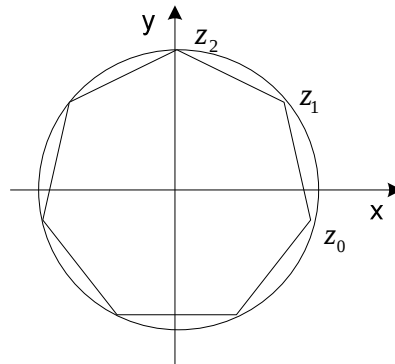
$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Iz jednakosti

$$r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \text{ dobijamo}$$

$$r = \rho^n \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Geometrijski ova rešenja su temena pravilnog mnogougla upisanog u krug poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ (slika 4).



slika 4

Primer: Izračunati $\sqrt[3]{-1}$

Ako je $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, imamo da je $\rho = 1$ i $\theta = \pi$, pa koristeći formulu za koren kompleksnog broja dobijamo: $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$

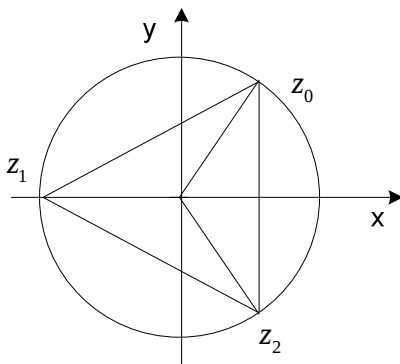
Za $k = 0, 1, 2$ dobijamo tri različite vrednosti:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Geometrijski rešenja trećeg korena su temena jednakostraničnog trougla (slika 5).



slika 5

2.2.3 EKSPONENCIJALNI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA.

- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja je $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$
- **Ojlerova formula:** $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Primer: Ako je $z = -1$, tada je $\rho = 1$, $\varphi = \pi$, pa se u eksponencijalnom obliku dobije Ojlerova "zlatna" jednačina koja povezuje najznačajnije brojeve u matematici

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

3. ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE

3.1 MATRICE

3.1.1 POJAM MATRICE

Uzmemo li m jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ M & O & M & M \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\},$$

tada kažemo da je zadat sistem linearnih jednačina (S). Brojevi $a_{ij}, b_i, i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n$, zovu se koeficijenti sistema (S). Ako izostavimo oznake nepoznatih x_j , znakove operacija i koeficijente b_i , dobijemo pravougaonu šemu ili tabelu koeficijenata a_{ij} .

- **Matricom** nazivamo pravougaonu šemu sa $m \times n$ elemenata, (uređenih po vrstama i kolonama), raspoređenih u m vrsta i n kolona:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice se označavaju velikim slovima latinice: $A, B, C, \dots$

Proizvoljni element matrice a_{ij} pripada i -toj vrsti i j -toj koloni pa matricu možemo označiti i na sledeći način $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Za matricu sa m vrsta i n kolona kažemo da ima dimenziju $m \times n$.

- Dve matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ su jednake, $A = B$ ako i samo ako je: $a_{ij} = b_{ij}, \forall (i, j), i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$. Za ovakve matrice kažemo da su **komforne**.

- Ako je u matrici $[a_{ij}]_{m \times n} \quad m = 1, n > 1$, tada definišemo **matricu vrste**:

$$[a_{ij}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

- Ako je $m > 1, n = 1$, tada definišemo **matricu kolone**:

$$[a_{ij}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ M \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- Matrica čiji su svi elementi nule naziva se **nula-matrica**.
- Ako je broj vrsta jednak broju kolona, tada je matrica **kvadratna matrica**.

Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ leže na **glavnoj dijagonali** kvadratne matrice, dok elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ pripadaju **sporednoj dijagonali**.

- Kvadratna matrica u kojoj su svi elementi van glavne dijagonale nula, a elementi na glavnoj dijagonali nisu svi nula, zove se **dijagonalna matrica**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & L & 0 \\ 0 & a_{22} & K & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & K & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & K & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & K & 1 \end{bmatrix}, \quad IA = AI = A$$

koja se za $a_{11} = a_{22} = L$ $a_{nn} = 1$ zove **jedinična matrica** i označava se slovom I .

Ako su u dijagonalnoj matrici svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki a , $a \neq 0$, imamo **skalarnu matricu**:

$$S = \begin{bmatrix} a & 0 & L & 0 \\ 0 & a & K & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & K & a \end{bmatrix}$$

- Zamenu mesta svih vrsta odgovarajućim kolonama ili obrnuto nazivamo **transponovanjem** matrice. Ako je data matrica $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, njena transponovana matrica imaće oblik $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & L & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & K & a_{n2} \\ M & M & O & M \\ a_{1m} & a_{2m} & K & a_{nm} \end{bmatrix}$$

3.1.2 OPERACIJE SA MATRICAMA

SABIRANJE MATRICA

- **Zbir** matrica istih dimenzija $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ako i samo ako je $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Napomena: Zbir matrica različitih dimenzija nije definisan.

- Operacija sabiranja matrica ima sledeće osobine:

komutativnost $A + B = B + A$

asocijativnost $(A + B) + C = A + (B + C)$

Primer: Sabrati matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

MNOŽENJE MATRICE BROJEM

- **Proizvod broja** $\lambda \in R$ i matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je matrica istih dimenzija, čiji se elementi dobijaju kada elemente matrice A pomnožimo brojem λ .

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

- Operacija množenja matrice brojem ima sledeće osobine:

-komutativnost: $\lambda A = A\lambda$

-asocijativnost: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $\alpha, \beta \neq 0$

-distributivnost s obzirom na zbir brojeva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

-distributivnost s obzirom na zbir matrica: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

P-imer: Pomnožiti matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ brojem $\lambda = 2$.

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

MNOŽENJE MATRICA

- **Proizvod** $A \cdot B$ matrica $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ i $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ je matrica C , čiji elementi c_{ij} se formiraju po zakonu:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

Napomena: Matrica C ima onoliko vrsta koliko ih ima matrica A i onoliko kolona koliko ih ima matrica B .

Napomena: Dakle, element c_{ij} matrice C , koji se nalazi u preseku i -te vrste i j -te kolone, obrazuje se tako što se elementi i -te vrste matrice A pomnože odgovarajućim elementima j -te kolone matrice B i dobijeni proizvodi saberu.

- Operacija množenja matrica ima sledeće osobine:

asocijativnost: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

U opštem slučaju za množenje matrica **ne važi zakon komutacije**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Primer: Pomnožiti matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 0 & 7 \cdot (-1) + 8 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -8 \\ 31 & -14 \end{bmatrix}.$$

Proizvod $B \cdot A$ nije definisan zato što dimenzije matrica nisu odgovarajuće.

ZADACI

1. Naći zbir matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-2) \\ 3+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Pomnožiti matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ brojem $\lambda = 2$.

Rešenje:

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

3. Naći matricu $C = 2 \cdot A - B$, ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$C = 2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Naći proizvode $A \cdot B$ i $B \cdot A$ matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

Proizvod matrica nije komutativna operacija, odnosno $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Proizvod $B \cdot A$ ne postoji jer dimenzije matrica A i B nisu odgovarajuće.

5. Pomnožiti matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -8 \\ 31 & -14 \end{bmatrix}.$$

6. Dokazati da za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ važi da je relacija $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

Rešenje:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, naći njenu transponovanu matricu A^T .

Rešenje:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

8. Proveriti sledeće rezultate:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13],$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 DETERMINANTE

- Svakoj kvadratnoj matrici pridružujemo realni broj koji zovemo **determinanta**.
- **Determinanta** je broj koji odgovara **kvadratnoj** šemi od $n \times n$ elemenata raspoređenih u n vrsta i n kolona.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Napomena: Determinanta je **realan broj** koji je radi lakšeg pamćenja zapisan kao šema brojeva, za razliku od matrice koja je samo šema proizvoljnih elemenata.

- Broj $|a_{11}| = a_{11}$ naziva se **determinanta prvog reda**.
- Broj $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ naziva se **determinanta drugog reda**.
- Broj $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ naziva se **determinanta trećeg reda**.

3.2.1 IZRAČUNAVANJE DETERMINANTE SARUSOVO PRAVILO

- **Sarusovo pravilo** vredi samo za determinante trećeg reda

$$\begin{vmatrix} + & + & \pm \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Primer: Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0$$

LAPLASOVO PRAVILO

- Za razliku od Sarusovog pravila koje se koristi samo za izračunavanje determinanti trećeg reda, Laplasovo pravilo važi za determinante bilo kog reda.
- Osnovna ideja ovog pravila je da se izračunavanje determinante n -tog reda svodi na izračunavanje determinante $n-1$ reda, determinanta $n-1$ reda svodi se na izračunavanje determinante $n-2$ reda i taj postupak se ponavlja sve dok se ne dođe do determinante prvog reda.

Da bismo objasnili ovu metodu potrebno je da definišemo pojam **minora** i pojam **kofaktora**.

Neka je D determinanta n -tog reda

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Svaki element determinante a_{ij} ima svoj odgovarajući minor.

- **Minor** M_{ij} elementa a_{ij} je determinanta koja se dobija iz determinante D odbacivanjem i -te vrste i j -te kolone.

Napomena: Očigledno, determinanta trećeg reda ima onoliko minora koliko i elemenata, tj. 9. Na primer, elementima a_{11} , a_{12} i a_{13} odgovaraju minori su:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- **Kofaktor** elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- **(Laplasovo pravilo)** Determinanta je jednaka zbiru proizvoda elemenata ma koje vrste (odnosno kolone) i odgovarajućih kofaktora tj.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

(razvoj po elementima i -te vrste)

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

(razvoj po elementima j -te kolone)

Primer: Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Determinanta se može izračunati razvojem po bilo kojoj vrsti ili koloni.

Razvojem po prvoj vrsti dobićemo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

3.2.2 OSOBINE DETERMINANTI

- Ako u proizvoljnoj determinanti dve susedne vrste (odnosno kolone) uzajamno promene mesta determinanta menja znak.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -D$$

- Determinanta se množi brojem $k \neq 0$ ako se svi elementi bilo koje vrste (odnosno kolone) pomnože tim brojem.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, kD = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Ako su svi elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednake nuli, determinanta je jednaka nuli.
- Ako su u determinanti dve vrste (odnosno kolone) jednake ili proporcionalne tada je vrednost determinante jednaka nuli.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = k(a_1b_1 - a_1b_1) = k \cdot 0 = 0$$

- Ako sve vrste (odnosno kolone) date determinante reda $n \geq 3$ ciklično promene mesta determinanta ne menja svoju vrednost.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- Determinanta se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste (odnosno kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (odnosno kolone), pomnoženi jednim istim brojem.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ma_3 \end{vmatrix}$$

- Determinante matrica A i A^T su jednake.
- Ako su elementi jedne vrste (odnosno kolone) date determinante zbrovi od dva ili više sabiraka, tada se determinanta može razložiti na zbir od dve ili više determinanata.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

3.2.3 INVERZNA MATRICA

- Data je kvadratna matrica A . Matrica A^{-1} koja ima svojstvo, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ gde je I jedinična matrica, zove se **inverzna matrica** matrice A .
- Za kvadratnu matricu A kažemo da je je **regularna** ako je $\det A \neq 0$, a **singularna** ako je $\det A = 0$.
- **Adjungovana matrica** matrice A u oznaci $\text{adj}A$ je transponovana matrica matrice kofaktora matrice A . **Kofaktor** elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Inverzna matrica**, kvadratne regularne matrice A je matrica

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & K & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & K & A_{n2} \\ M & M & O & M \\ A_{1n} & A_{2n} & K & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{\text{adj}A}{\det A}$$

Primer: Naći inverznu matricu date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Kako je $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, postoji matrica A^{-1} .

Kofaktori matrice A su $A_{11} = 5$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 2$.

Nalazimo da je: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Primer: Naći inverznu matricu date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

Kofaktore matrice A je pogodno pisati na papiru odmah u transponovanom obliku, kako bi se lakše ispisali elementi adjungovane matrice kao što je:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2.4 RANG MATRICE

Definicija: Maksimalan stepen (red) minora matrice A , koji je različit od nule jednak je rang matrice A .

Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta jednak je maksimalnom broju nezavisnih kolona i taj broj je **rang matrice**.

Ovo znači da regularna matrica n -tog reda ima rang jednak n .

Rang matrice se ne menja, ako se na elemntima matrice izvedu ove elementarne transformacije:

- medjusobno zamene mesta bilo koje dve vrste (kolone),
- množenje bilo koje vrste (kolone) proizvoljnim brojem $k \neq 0$,
- dodavanje bilo kojoj vrsti (koloni) linearne kombinacije preostalih vrsta (kolona)

Na ovaj način transformišemo zadatu matricu kod koje su na glavnoj dijagonali brojevi različiti od nule, a ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Koliko na glavnoj dijagonali ima brojeva različitih od nule toliko je rang matrice.

Primer: Odrediti rang matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

Zamenimo mesta prvoj i drugoj koloni da bismo na prvom mestu dobili 1. Prvu vrstu množimo sa (-3) i dodajmo je trećoj vrsti, a zatim drugu vrstu množimo sa 2 i dodajmo trećoj vrsti. Sve determinante trećeg reda su jednake nuli, a determinanta drugog reda je različita od nule pa je rang matrice $r = R(A) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

3.3.1 GAUSOV ALGORITAM

Dat je sistem od m nehomogenih linearnih jednačina sa n promenljivih

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

- Gausova metoda se sastoji u sukcesivnom eliminisanju nepoznatih iz sistema i transformacijom sistema u trougaoni sistem u kome prva jednačina ima n nepoznatih, poslednja m -ta jednačina jednu nepoznatu.

Pretpostavimo da je koeficijent $a_{11} \neq 0$. Isključimo nepoznatu x_1 iz svih jednačina sistema osim prve.

Da bismo to realizovali potrebno je prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{21}/a_{11}$ i dodati je drugoj jednačini, zatim prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{31}/a_{11}$ i dodati je trećoj jednačini, itd. Na taj način se umesto polaznog sistema dobija ekvivalentan sistem:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array} \right\}$$

Ako bi produžili isti postupak dobili bi sistem

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{mn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right\}$$

Poslednja jednačina sistema jednoznačno određuje promenljivu x_n , kada se vrednost za x_n uvrsti u pretposlednju jednačinu, jednoznačno se određuje promenljiva x_{n-1} , itd. U slučaju kad je $m = n$ sistem ima jedinstveno rešenje.

Ako je broj nepoznatih veći od broja jednačina, tada su $x_{k+1}, \dots, x_n$ slobodne promenljive koje prenosimo na desnu stranu, a zatim se kao i u prethodnom slučaju određuju vezane promenljive $x_1, \dots, x_k$. S obzirom na to da slobodne promenljive mogu imati proizvoljne vrednosti, sistem u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rešenja.

Primer: Gausovom metodom rešiti sistem jednačina

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x - y + z = 3$$

$$-2x + y + 2z = 6$$

Nakon množenja prve jednačine sa -2 i 2 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$5y - 4z = -2$$

Dodavanjem druge jednačine trećoj dobijamo sistem

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$3z = 9$$

Ovo je sistem trougaonog oblika iz kojeg se neposredno dobija jedinstveno rešenje $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

3.3.2 KRAMEROVA METODA

Dat je sistem od n jednačina sa n promenljivih:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

M

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Uočimo sledeće determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{determinanta sistema}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinanta koja odgovara nepoznatoj x_k ($k=1,2,K,n$).

Kramerovo pravilo:

- 1) Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, tada sistem ima **jedinstveno rešenje**

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k=1,2,K,n.$$

- 2) Ako je determinanta sistema $D=0$, a bar jedna od determinanti $D_k \neq 0$, $k=1,2,K,n$, sistem **nema rešenja**.

- 3) Ako je determinanta sistema $D=0$, i sve determinante $D_k=0$, $k=1,2,K,n$, sistem je **neodređen** i ako ima rešenja može ih imati samo beskonačno mnogo.

Primer: Rešiti sistem jednačina:

$$x + 3y - 2z = 1$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + 2z = 7$$

Determinanta sistema je : $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$

Pomoćne determinante D_x , D_y , D_z dobijamo kada u determinanti D zamenimo redom prvu, drugu i treću kolonu kolonom slobodnih članova.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -26, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -39, \quad \text{Rešenje sistema}$$

je:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-39}{-13} = 3$$

3.3.3 REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Dat je sistem od m homogenih jednačina sa n promenljivih:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} (S)$$

- Homogeni sistem ima samo **trivijalno** rešenje $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ako i samo ako $\det(A) \neq 0$.
- Homogeni sistem ima i **netrivijalno** rešenje ako i samo ako $\det(A) = 0$.

Primer: Homogeni sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

ima samo trivijalno rešenje $(0, 0, 0)$, jer je $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

3.3.4 MATRIČNI METOD ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Dat je sistem od n jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sistem se može napisati u matričnom obliku kao:

$$AX = B$$

gde je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{L} & a_{2n} \\ \text{M} & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Pod pretpostavkom da je matrica A regularna, tj. da joj je determinanta različita od nule, sistem ima jedinstveno rešenje $X = A^{-1}B$.

Primer: Rešiti sistem jednačina

$$x + 2y - z = -3$$

$$2x + 3y + z = -1$$

$$x - y - z = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\det A = 9, \quad \text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(x, y, z) = (2, -2, 1)$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(x, y, z) = (2, -2, 1)$$

4. VEKTORI

4.1 POJAM VEKTORA. OSNOVNE OPERACIJE S VEKTORIMA

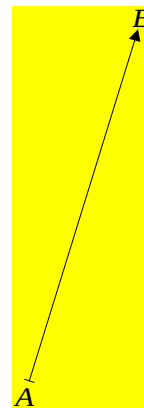
Def: **Vektori** su veličine određene svojom dužinom (brojnom vrednošću), svojim pravcem i smerom. Vektor se predstavlja uređenim parom tačaka, npr. (A, B) i označava se sa $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Def: Za dva vektora kažemo da su jednaki ako imaju istu dužinu, isti pravac i isti smer.

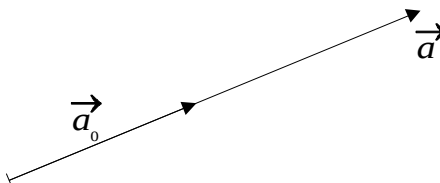
Def: **Slobodnim vektorom** se naziva vektor koji se sme pomerati tako da mu se pri tom ne menja ni dužina, ni pravac, ni smer; takvo pomeranje se naziva **translacija**.

Dužina vektora (intenzitet, modul, ili apsolutna vred.) označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$ ili $|\vec{a}|$.

Nula-vektor je vektor čija je dužina jednaka nuli; samim tim pravac mu nije određen; označava se sa $\vec{0}$.



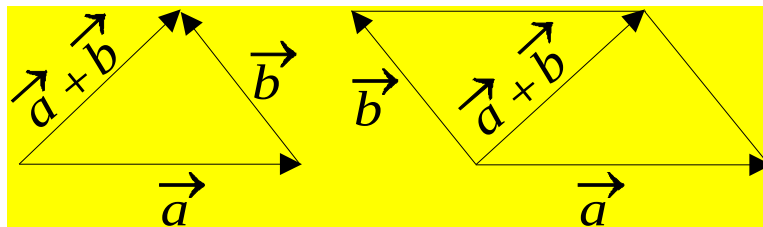
Vektor čija je dužina 1 zove se **jedinični vektor** ili **ort**. Kažemo da je $\vec{a}_0 = \text{ort } \vec{a}$ ako vektor $\vec{a}_0$ ima istu početnu tačku, isti pravac i smer kao i vektor $\vec{a}$ i $|\vec{a}_0| = 1$.



Sabiranje vektora.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva proizvoljna vektora (različita od nula-vektora). Ako se vektor $\vec{b}$ translatorsno pomeri tako da mu se početna tačka poklopi sa krajem vektora $\vec{a}$, dobićemo nadovezane vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Def: **Zbir** dva nadovezana vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je treći vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ kome je početak u početnoj tački vektora $\vec{a}$, a kraj u krajnjoj tački vektora $\vec{b}$.



Dva slobodna vektora se mogu sabirati i po tzv. principu paralelograma sila, ako se prethodno jedan od njih translatorno pomeri tako da mu se početna tačka podudara sa početnom tačkom drugog vektora. Vektori koje sabiramo zovu se komponente, a njihov zbir rezultanta.

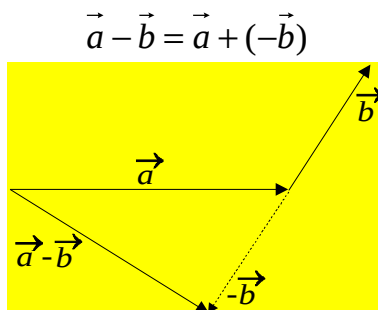
Definicija zbira dva vektora proširuje se na zbir konačno mnogo nadovezanih vektora:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{k-1}A_k} = \overline{AA_k}.$$

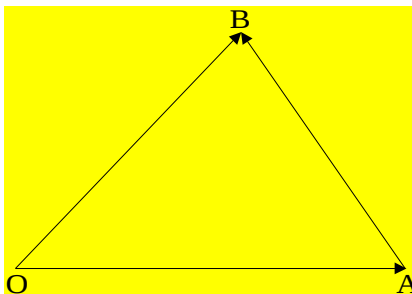
Sabiranje vektora ima sledeća svojstva:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - komutativnost
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - asocijativnost
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$ - $\vec{0}$ je neutralni vektor pri sabiranju
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ - za svaki vektor $\vec{a}$ postoji suprotan vektor $(-\vec{a})$, koji ima istu dužinu i pravac, ali suprotan smer.

Na osnovu svojstva 4. uvodi se operacija oduzimanja vektora kao operacija suprotna operaciji sabiranja, tj. razliku dva proizvoljna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definišemo kao zbir vektora $\vec{a}$ i vektora $(-\vec{b})$, suprotnog vektoru $\vec{b}$:



Razlika dva vektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}$, koji imaju zajednički početak je vektor $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



Množenje vektora skalarom.

Def: Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i realan broj $\lambda \neq 0$, tada je $\lambda \vec{a}$ vektor čiji je pravac isti kao i pravac vektora $\vec{a}$, modul je $|\lambda| |\vec{a}|$, a smer mu je isti kao i smer vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda > 0$, odnosno suprotan smeru vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda < 0$.

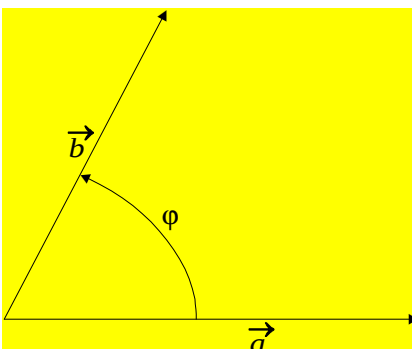
Za svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ možemo napisati da je:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \text{ort } \vec{a}.$$

Množenje vektora realnim brojem ima sledeća svojstva:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a}$;
2. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
4. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$.

Def: **Uglom** između dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (oznaka: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$) nazivamo najmanji ugao za koji jedan od tih vektora treba da se obrne oko zajedničke početne tačke da bi se poklopio sa drugim vektorom. Dakle, za proizvoljne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uvek je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$, a za kolinearne vektore je taj ugao 0 ili π .

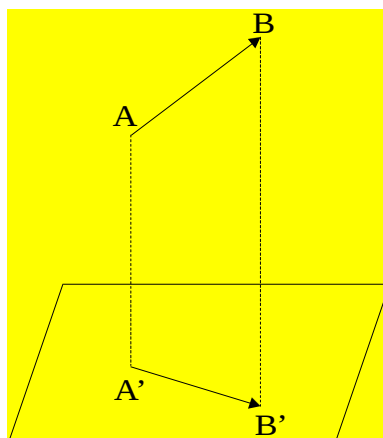
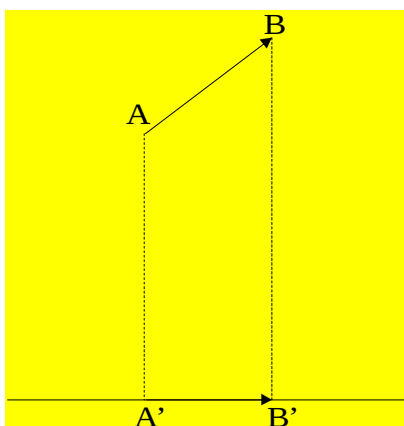


Def: Orijentisanom pravom ili osom nazivamo pravu za čije se bilo koje dve tačke zna koja je prethodna a koja sledeća, tj. za koju je utvrđen pozitivan smer. Osa se može okarakterisati i svojim jediničnim vektorom.

Osa na kojoj je utvrđena početna tačka O i tačka čije je odstojanje od početne tačke jednako 1 zove se **koordinatna osa**.

Def: Algebarska vrednost AB vektora $\overrightarrow{AB}$ na datoj osi je broj $+|\overrightarrow{AB}|$ ako je smer vektora $\overrightarrow{AB}$ isto kao i smer ose, odnosno broj $-|\overrightarrow{AB}|$ ako je smer vektora $\overrightarrow{AB}$ suprotan smeru ose.

Def: Projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na orijentisanu ili neorijentisanu pravu ili ravan je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ čiji je početak A' projekcija početne tačke A , a B' projekcija krajnje tačke B datog vektora $\overrightarrow{AB}$.



Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Def: Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **kolinearni** ako imaju isti pravac, tj. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda \neq 0$), ili, drugačije rečeno, ako postoje takvi skalari α i β , $\beta \neq 0$, da je:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0, \text{ tj. } \vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{a}$$

Def: Za tri ili više vektora kažemo da su **komplanarni** ako leže u jednoj ravni (ili ako leže u paralelnim ravnima). Da bi tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bili komplanarni treba da postoje takvi skalari α , β i γ (pri tom bar jedan od njih različit od nule) da je zadovoljena jednakost:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0.$$

Napomena: Zbir $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, odnosno $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ predstavlja tzv. linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Def: Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **linearno zavisni** ako postoje takvi skalari α i β (koji nisu istovremeno jednaki nuli) da je zadovoljena jednakost:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0, \text{ tj. } \vec{a} = \lambda\vec{b} \quad (\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}, \lambda \neq 0)$$

Prema tome, dva vektora su linearno zavisna ako i samo ako su kolinearna.

U opštem slučaju kažemo da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linearno zavisni** ako postoje takvi skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (koji nisu svi jednaki nuli) da je odgovarajuća linearna kombinacija uvek jednaka nuli:

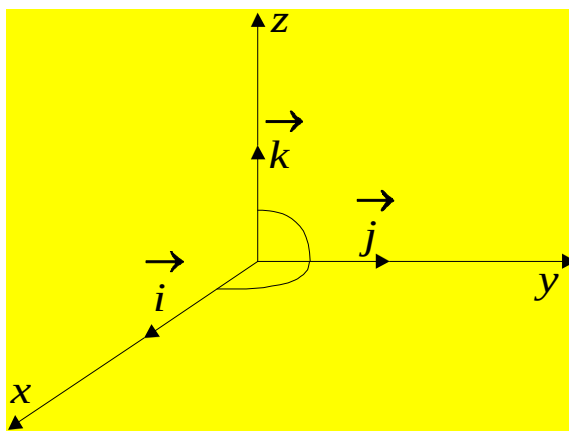
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i\vec{a}_i = 0.$$

U suprotnom kažemo da su vektori **linearno nezavisni**.

Dakle, dva linearno zavisna vektora su kolinearna, a dva linearno nezavisna vektora su nekolinearna (obrazuju kos ugao).

Svaka tri linearno nezavisna vektora obrazuju triedar (trostrani rogali). Pretpostavimo da triedar obrazuju tri jedinična vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ čiji pravci određuju koordinatne ose, dok im je zajednički početak O koordinatni početak. Ako su, osim toga, ovi jedinični vektori i uzajamno ortogonalni, onda oni obrazuju trodimenzioni pravougli Dekartov koordinatni sistem.

Uobičajeno je da se trodimenzioni pravougli koordinatni sistem određuje jediničnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koji respektivno leže na osama Ox, Oy, Oz (koje se nazivaju **apscisna osa, ordinatna osa i osa aplikata**).



4.2 SKALARNI PROIZVOD VEKTORA

Def: Skalarnim (unutrašnjim) proizvodom dva vektora nazivamo proizvod njihovih modula i kosinusa ugla određenog tim vektorima.

Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar i označavamo ga sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$ ili $\vec{a}\vec{b}$. Dakle:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha,$$

gde je: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Primetimo da skalarni proizvod možemo napisati u obliku:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| (|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}))$$

odnosno

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| (|\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}))$$

gde je $|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ algebarska vrednost projekcije vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$, dok je $|\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ algebarska vrednost projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

$$\text{proj}_{\vec{a}}^{\vec{b}} = |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Def: Skalarni proizvod dva vektora je proizvod modula jednog vektora i algebarske vrednosti projekcije drugog vektora na prvi vektor.

Svojstva skalarnog proizvoda:

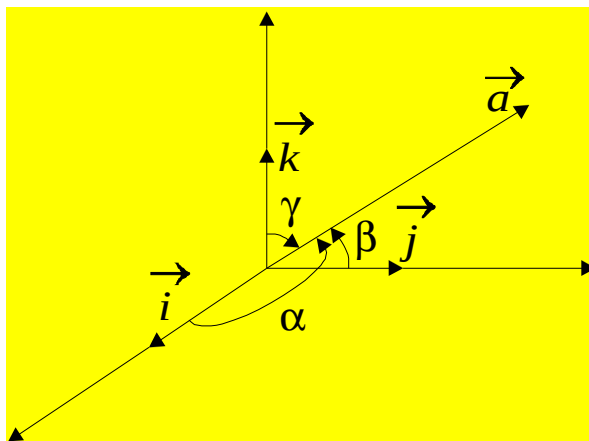
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - komutativnost
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$
3. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \neq 0) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ - uslov ortogonalnosti
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ - distributivnost u odnosu na sabiranje vektora
5. $\forall \lambda \neq 0, \lambda \in R, (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Razlaganje vektora u pravcu koordinatnih osa

Ako je dat proizvoljni vektor $\vec{a}$, tada će algebarske vrednosti njegovih projekcija na koordinatne ose Ox , Oy i Oz (čiji su jedinični vektori $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$), biti:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos \gamma,$$

gde su α , β i γ uglovi koje vektor $\vec{a}$ obrazuje redom sa vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ (ortonormirane baze).



Uslov ortogonalnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

U Dekartovom koordinatnom sistemu sa bazom $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ skalarni proizvod vektora $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ i $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

stoga je za $\vec{a} = \vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$,

tj. **modul vektora** $\vec{a}$ je $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

U ortonormiranom koordinatnom sistemu u n -dimenzionom prostoru je skalarni proizvod vektora $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

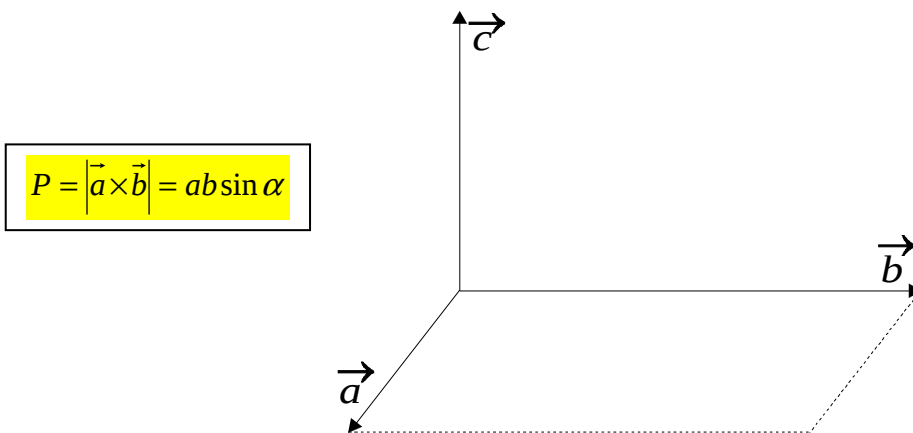
a modul vektora $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

4.3 VEKTORSKI PROIZVOD VEKTORA

Def: Vektorski (spoljašnji) proizvod dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ koji ima:

- modul jednak površini paralelograma koji određuju $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- pravac ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- smer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desni triedar.



Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se označava sa $\vec{a} \times \vec{b}$ (ili $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $[\vec{a}, \vec{b}]$). Dakle, ako je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, tada je:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Ako je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq 0$) $\Leftrightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, tj. tada su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

Svojstva vektorskog proizvoda:

1. $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ (pri tom je $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$) - ne važi komutativnost
2. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$, za svaki skalar λ
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\forall \vec{a} \neq 0$
5. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq 0$) $\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda \neq 0$).

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva proizvoljna vektora zadata svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, tada je vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

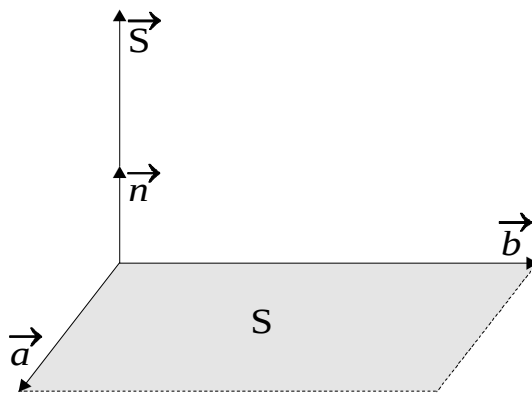
tj.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

koordinate vektorskog proizvoda datih vektora su:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{a_y b_z - a_z b_y, b_z a_x - b_x a_z, a_x b_y - a_y b_x\}$$

Vidimo da vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ predstavlja vektor $\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ($\neq 0$) koji svojim pravcem određuje položaj, svojim smerom orijentaciju, a svojim modulom veličinu (površinu) paralelograma koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle, površina orijentisanog paralelograma može se predstaviti pomoću određenog normalnog vektora $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$): $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$.



4.4 MEŠOVITI PROIZVOD TRI VEKTORA

$$\left(\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right) \cdot \vec{c} = \text{skalar}$$

Def: Mešoviti proizvod tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar koji označavamo sa $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i koji je jednak zapremini V paralelopipeda obrazovanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako je triedar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ desne orijentacije, a ako je leve orijentacije, tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$.

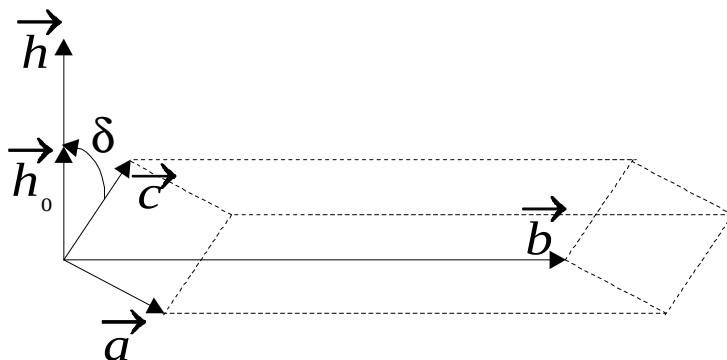
Neka je $\vec{h} = \vec{a} \times \vec{b}$, a $\vec{h}_0 = \text{ort } \vec{h}$, tj. $\vec{h}_0 = \text{ort } (\vec{a} \times \vec{b})$; možemo napisati da je $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \vec{h}_0$, a $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je merni broj B površine paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle,

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= B \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= B \cdot \vec{h}_0 \cdot \vec{c} = B \cdot (\vec{h}_0 \cdot \vec{c}) = B \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \delta, \end{aligned}$$

gde je $|\vec{c}| \cdot \cos \delta = H$ algebarska vrednost projekcije vektora $\vec{c}$ na pravac jediničnog vektora $\vec{h}_0$; pri tom je $H > 0$ ako je $0 < \delta < \pi/2$ (tj. $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desni triedar), i $H < 0$ ako je $\pi/2 < \delta < \pi$ (tj. $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju levi triedar), a $|H|$ je visina paralelopipeda sa osnovom B .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = B \cdot H = V,$$

gde znak skalara V zavisi od orijentacije uređene trojke a , b i c .



Svojstva mešovitog proizvoda:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$
3. $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}]$
4. ciklična promena mesta vektora u mešovitom proizvodu ne menja njegovu vrednost jer je svejedno koju stranu paralelopipeda uzimamo za osnovu, pod uslovom da odgovarajući triedar ne menja orijentaciju:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

5. **Uslov komplanarnosti tri vektora** $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je da je njihov mešoviti proizvod jednak nuli:
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Ako su vektori zadati koordinatama $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ i $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$, tada je njihov mešoviti proizvod:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ako su ova tri vektora linearno zavisni odnosno komplanarni (leže u istoj ravni) onda je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

6. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

- Neka su A i B proizvoljni skupovi. **Preslikavanje** ili **funkcija** $f : A \rightarrow B$ predstavlja zakon korespondencije pomoću koga se proizvoljnom elementu skupa A dodeljuje neki element skupa $B : x \rightarrow y, x \in A, y \in B$.
- Element $x \in A$ naziva se **original**, a $y \in B$ njegova **slika**.
- Skup $A_1 \subset A$ onih elemenata iz A kojima su korespondirani elementi skupa B naziva se **oblast definisanosti** funkcije $f : A \rightarrow B$, ili **domen** D_x te funkcije.
- Skup $B_1 \subset B$ onih elemenata iz B kojima su korespondirani elementi skupa A naziva se **oblast vrednosti** funkcije $f : A \rightarrow B$, ili **kodomen** D_y te funkcije.
- Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **jednoznačna** ako se bilo kojem elementu iz skupa A korespondira najviše jedan element iz skupa $y \in B$.

Načini zadavanja funkcija

1. Tablični način zadavanja funkcije
2. Zadavanje funkcije njenim grafikom
3. Zadavanje funkcije analitičkim izrazom
4. Zadavanje funkcije pomoću parametara

5.1 REALNE FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

- Pod **realnom funkcijom** podrazumeva se svako preslikavanje $f : A \rightarrow B$, gde je $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$
- Kod realnih funkcija **domen** je skup $A \subseteq \mathbb{R}$, a **kodomen** $B \subseteq \mathbb{R}$.

Odrediti domene funkcija

Primer: 1. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

Znajući da imenilac razlomka mora da bude različit od 0, zaključujemo da izraz u imeniocu $x-3 \neq 0$, odakle dobijamo $x \neq 3$. Prema tome domen funkcije je skup $D_x = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ili uobičajen je zapis $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

Primer 2. $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x) \cdot (2+x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 2]$.

Primer 3. $y = \ln \frac{x}{3-x} \Rightarrow \frac{x}{3-x} > 0 \wedge x \neq 3 \Rightarrow x \in (0, 3).$

Primer 4. $y = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow x \in \mathbf{R}.$

Primer 5. Odrediti kodomen funkcije $y = \sin x \Rightarrow y \in [-1, 1]$

Važnije osobine funkcija

- Funkcija f je **ograničena** na skupu $A \subseteq D_x$, ako važi

$$(\exists m, M \in \mathbf{R})(\forall x \in A, m \leq f(x) \leq M)$$

- Geometrijski ovo znači da se grafik funkcija nalazi između dve prave $y = m$ i $y = M$

Primer 6. Ispitati ograničenost funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Kako je za $(\forall x \in \mathbf{R}) \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ funkcija je ograničena na intervalu $(0, 1]$

- Nule** funkcije su tačke u kojima funkcija ima vrednost nula.

▪

Nule funkcije su tačke preseka funkcije sa Ox osom

Odrediti nule funkcije

Primer 7. $y = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}, y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0, x = 2.$

Primer 8. $y = \frac{1 + \ln x}{x^2}, y = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0, \ln x = -1, x = e^{-1}.$

Primer 9. $y = \frac{e^x}{x-1}, y \neq 0 \forall x \in \mathbf{R},$ funkcija nema nule.

- Parnost funkcije**

▪

Funkcija $f(x)$ za koju je $f(-x) = f(x)$ naziva se **parnom** funkcijom. Njen grafik je simetričan u odnosu na osu Oy . Ukoliko je $f(-x) = -f(x)$, tada se takva funkcija naziva **neparnom** i njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak O .

Ako je $f(-x) \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$, onda je funkcija ni parna ni neparna.

Primer 10. $f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$ funkcija je parna.

Primer 11.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 2x + \sin x \Rightarrow \\
 f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x) + \sin(-x) = \\
 &= -x^3 + 2x - \sin x = \\
 &= -(x^3 - 2x + \sin x) = -f(x)
 \end{aligned}$$

funkcija je neparna.

Primer 12.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 2x + \sin x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + \sin(-x) = -x^3 + 2x - \sin x = \\
 &= -(x^3 - 2x + \sin x) = -f(x)
 \end{aligned}$$

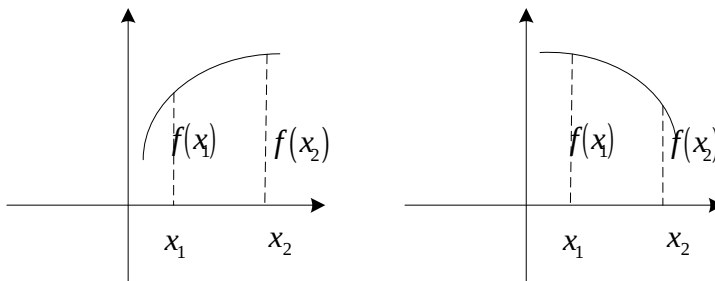
funkcija je neparna.

- Funkcija $f(x)$ je **periodična** ako postoji broj T za koji je ispunjena jednakost $f(x+T) = f(x)$.

Trigonometrijske funkcije su periodične. Funkcije $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$ imaju osnovni period $T = 2\pi$, a funkcije $f(x) = \tan x$ i $f(x) = \cot x$ imaju osnovni period $T = \pi$.

▪ Monotonost funkcije (rašćenje i opadanje)

- Funkcija $f: A \rightarrow B$ je **rastuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, a **strogo rastuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkcija $f: A \rightarrow B$ je **opadajuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, a **strogo opadajuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Rastuće i opadajuće funkcije jednim imenom zovemo **monotone funkcije**. Monotone funkcije označavamo $f(x)$ Z ako je rastuća, $f(x)$] ako je opadajuća.



Primer 13. Funkcija $y = e^x$ je strogo rastuća $\forall x \in \mathbb{R}$, jer za $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

Primer 14. Funkcija $y = \ln x$ je strogo rastuća $\forall x \in (0, \infty)$.

Primer 15. Funkcija $y = -x^3$ je strogo opadajuća $\forall x \in \mathbb{R}$.

Primer 16. Funkcija $y = 2x^2 - 8x + 5$ je parabola tipa $y = ax^2 + bx + c$,

sa minimumom u tački: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$.

To znači da opada za $x \in (-\infty, 2)$, a raste za $x \in (2, +\infty)$.

▪ Konkavnost i konveksnost

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je **konveksna** ako $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, a **konkavna**

ako $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

Primer Funkcija $y = x^2$ je konveksna, što zaključujemo iz nejednačine.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \text{ tj } (x_1 - x_2)^2 > 0.$$

KOMPOZICIA FUNKCIJA

Definicija: Neka su date funkcije $f : D \rightarrow R$ i $g : K \rightarrow R$. Ako je slika funkcije f podskup domena funkcije g , definišemo **kompoziciju funkcija**, odnosno funkciju $h : D \rightarrow R$ takvu da je $h(x) = g[f(x)]$. Kompoziciju funkcija f i g u kojoj na x prvo deluje funkcija f , a potom na $f(x)$ funkcija g , označavamo sa $g \circ f$.

Nije teško razumeti kako kompozicija funkcija deluje na x ; možda je jedino na prvi pogled nejasan zahtev da slika funkcije f bude podskup domena funkcije g , no to je jednostavno preduslov da bi kompozicija bila dobro definisana. Naime, funkcija g deluje samo na elemente skupa K i ako bi postojao neki x za koji je $f(x)$ izvan skupa K , za takav x ne bi bila definisana kompozicija $g[f(x)]$ (jer funkcija g "ne zna šta bi" s vrednošću $f(x)$).

Primer 17. Odredite $g \circ f(x)$ ako je $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 2$

Rešenje: Moramo odrediti čemu je jednak $g[f(x)]$, odnosno $g(2x + 3)$.

Problem koji se može pojaviti je "doslovno" shvatanje argumenta x u definiciji funkcije g .

$$g \circ f(x) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2 = 4x^2 + 12x + 7.$$

Primer 18. Odredite inverznu funkciju za $f(x) = 2x + 1$.

Rešenje: Inverznu funkciju nalazimo tako što zamenimo mesta x i y i rešimo po y ,

$$x = 2y + 1 \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

NAPOMENA: u prilogu su date elementarne funkcije

5.2 GRANIČNE VREDNOSTI I NEPREKIDNOST FUNKCIJA

a) GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

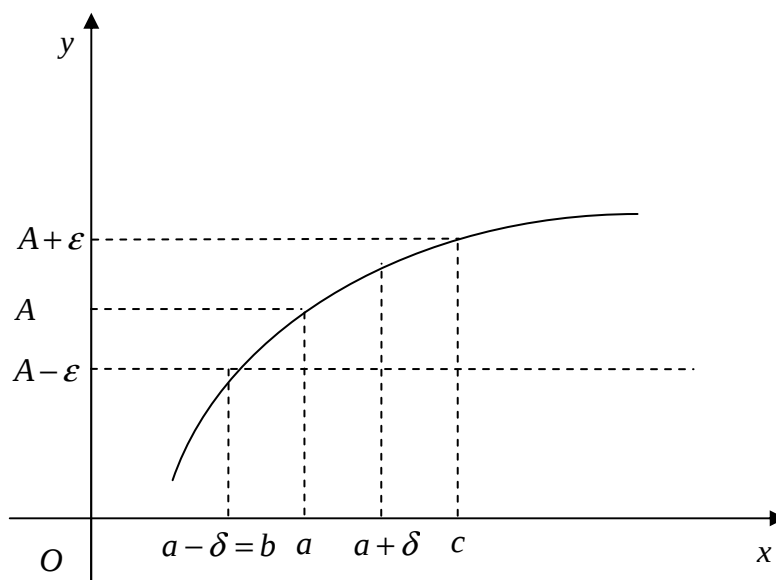
1. Definicija granične vrednosti

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u okolini tačke $x = a$, izuzev možda u samoj tački a .

Broj A je **granična vrednost funkcije** $f(x)$ u tački $x = a$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Tada pišemo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.



Teorema 1. Ako postoji granična vrednost funkcije, onda je ta vrednost jedinstvena.

2. Beskonačno male funkcije

Funkcija $f(x)$ je **beskonačno mala** kada $x \rightarrow a$ ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Drugim rečima,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

Teorema 2. Zbir dve beskonačno male funkcije je beskonačno mala funkcija; tj. ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, tada je i $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 0$.

Funkcija $f(x)$ je **ograničena** kad $x \rightarrow a$ ako postoji okolina tačke a u kojoj je $f(x)$ ograničena, tj.

$$(\exists \delta > 0) \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x)| \leq M, \quad (M > 0).$$

Teorema 3. Proizvod beskonačno male i ograničene funkcije kad $x \rightarrow a$ je beskonačno mala funkcija.

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, onda je $f(x) - A$ beskonačno mala funkcija kad $x \rightarrow a$ pa

možemo pisati $f(x) - A = \alpha(x)$, gde $\alpha(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$. Važi i obratno tvrđenje, pa je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow a).$$

3. Osnovne teoreme o graničnim vrednostima funkcije

Teorema 4. Ako postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, onda postoji i $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$, i pri tome je

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Dokaz: Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Tada je

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x)$$

gde su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ beskonačno male kad $x \rightarrow a$.

Dalje je

$$f(x) + g(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x)).$$

Na osnovu **Teoreme 3.** je $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, odakle sledi da je

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Slično se mogu dokazati i sledeće jednakosti:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ ako je } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

4. Leva i desna granična vrednost

Broj A je **desna granična vrednost** funkcije $f(x)$ kad $x \rightarrow a$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Pišemo: $L_d = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A$ ili $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$

Broj A je **leva granična vrednost** funkcije $f(x)$ kad $x \rightarrow a$ ako

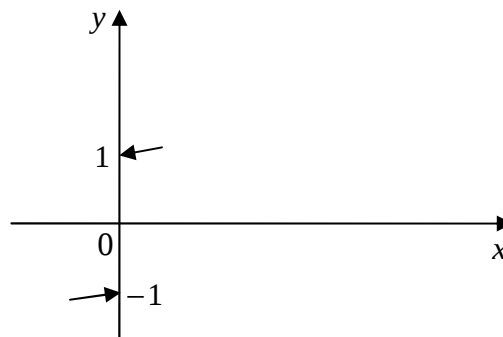
$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Pišemo: $L_l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = A$ ili $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$

$$f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$$

$$L_d = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$L_l = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$



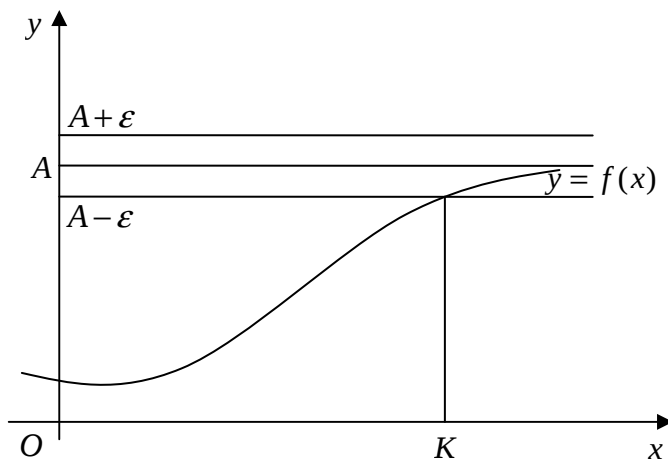
Teorema 5. Granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x = a$ postoji ako i samo ako u toj tački postoje leva i desna granična vrednost i ako su one jednake: $L_d = L_l = f(a)$

U gornjem primeru prema ovoj teoremi ne postoji $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, jer je $L_d \neq L_l$.

5. Granična vrednost funkcije kada $x \rightarrow \infty$

Broj A je granična vrednost funkcije $f(x)$ kad $x \rightarrow \infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists K(\varepsilon) > 0) (|x| > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$



Funkcija $f(x)$ je **beskonačno mala** kad $x \rightarrow \infty$ ako je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Drugim rečima,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists K(\varepsilon) > 0) (|x| > K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

Primeri takvih funkcija su: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{x}{x^2 + 1}$, Λ

Funkcija $f(x)$ je **beskonačno velika** kad $x \rightarrow \infty$, ako

$$(\forall M > 0) (\exists K > 0) (|x| > K \Rightarrow |f(x)| > M).$$

Tada pišemo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, npr. kod funkcije $f(x) = x^3$

Teorema 6. Ako je $f(x)$ beskonačno mala (velika) kad $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), onda je $\frac{1}{f(x)}$ beskonačno velika (mala) funkcija kad $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$).

Primer 19. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

6. Upoređivanje beskonačno malih veličina

Neka su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ beskonačno male funkcije kad $x \rightarrow a$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0.$$

Ako postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$$

i ako je $A \neq 0$, onda za $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ kažemo da su beskonačno male **istoga reda** kad $x \rightarrow a$.

Primer 20. $\alpha(x) = 2x$, $\beta(x) = \sin 3x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

Specijalno, ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

za veličine $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ kažemo da su **ekvivalentne** kad $x \rightarrow a$ i pišemo

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \rightarrow a.$$

Primer 21. $\alpha(x) = ax$, $\beta(x) = \sin ax$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax}{\sin ax} = 1 \Rightarrow \sin ax \sim ax, \quad x \rightarrow a.$$

Ako su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ beskonačno male kad $x \rightarrow a$ i ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

onda kažemo da je $\alpha(x)$ beskonačno mala višeg reda u odnosu na $\beta(x)$ i pišemo

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Primer 22. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x}{\sin x} = 0; \quad x^2 = o(\sin x), \quad x \rightarrow 0.$$

Funkcija $\alpha(x)$ predstavlja **beskonačno malu k -tog reda** u odnosu na $\beta(x)$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A \neq 0.$$

Primer 23. $\alpha(x) = x^3$, $\beta(x) = -2x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(-2x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{-8x^3} = -\frac{1}{8}; \quad x^3 \text{ je beskonačno mala 3-ćeg reda u odnosu na } -2x.$$

Napomena: Izrazi $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , itd, kao što je rečeno nazivaju se neodređenim izrazima.

b) NEPREKIDNOST FUNKCIJA

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 ako je $f(x) - f(x_0)$ po apsolutnoj vrednosti malo kada je $x - x_0$ dovoljno malo. Drugim rečima aproksimacija broja $f(x_0)$ sa $f(x)$ se zadaje nekim malim brojem $\varepsilon > 0$.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 , akko je

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Dakle, **limes neprekidne funkcije u tački x_0 jednak je vrednosti funkcije u toj tački**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

NEKI ZNAČAJNI LIMESI

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

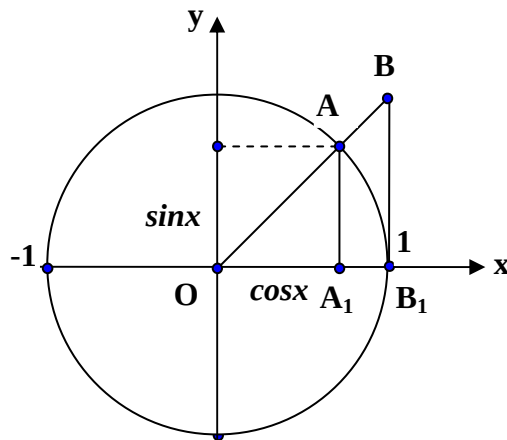
Prema slici je $AA_1 = \sin x$, $OA_1 = \cos x$, $BB_1 = \tan x$,

luk $B_1A = x$

Uporedimo površinu P kružnog iseka OB_1A ,

P_1 trougla OAA_1 i

P_2 trougla OB_1B



$$P = \frac{r^2 x}{2} = \frac{x}{2}, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}), \quad P_1 = \frac{\cos x \sin x}{2}, \quad P_2 = \frac{1 \tan x}{2},$$

$$P_1 < P < P_2,$$

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}, \text{ ako ovo pomnožimo sa } \frac{2}{\sin x}, \text{ dobije se}$$

$$\text{nejednakost } \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ ili konačno}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ što za slučaj kada } x \rightarrow 0, \text{ daje početnu vrednost: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ovo vredi i uopšteno $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin f(x)}{f(x)}$, ako $f(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow c$.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ odnosno } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

Na osnovu ovih limesa izračunavaju se i limesi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ odnosno } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ itd,}$$

ZADACI

Odrediti granične vrednosti funkcija:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - 6x} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 5}{2^3 - 6 \cdot 2} = -\frac{3}{4}, \quad \text{ovo je tip limesa } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Najčešće se javljaju neodređenosti vrednosti limesa sledećih tipova:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty.$$

$$2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^2 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2 - 2x + 1}$$

Rešenje: U ovim primerima se javlja neodređenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$, pa treba podeliti brojilac i imenilac podeliti najvećim stepenom promenljive x .

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} \right)^2 = 1 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty \quad \text{v) } 0 \quad \text{g) } \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x + 3} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 16x}{2x^2 + 4x - 16}$$

Rešenje: U ovim primerima je neodređenost tipa $\frac{0}{0}$, pa treba izvršiti pogodnu transformaciju da bi se izbegla ova neodređenost.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+4)} = -1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 3)}{(x+3)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x^2 + 3)}{x^2 + 1} = -\frac{36}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^3 - x - 3x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x^2 - 1) - 3(x-1)} =$$

v)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x(x+1)-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x - 3} = -3$$

g) $\frac{16}{3}$

4. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{4x}$ g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$

Rešenje: Kod neodređenosti tipa $\infty - \infty$, potrebno je izvršiti racionalizaciju brojioca, imenioca ili oba

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}. \quad \text{v) } \frac{1}{4}, \quad \text{g) } 4$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 16} + 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 4$

5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$ v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$

Rešenje: Ovi limesi se svode na broj e

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x} \right]^{\frac{1}{-2x} \cdot \frac{1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{6}{2x}} = e^6$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2 \quad \text{g) } e^3$$

$$6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

Rešenje: Ovakvi limesi se svode na $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{2 \cdot 3x} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0, \quad \text{v) }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1$$

5.3 PRIMENA LIMESA PRI ODREĐIVANJU ASIMPTOTA FUNKCIJA

Asimptote funkcija su prave linije kojima se približavaju grafici funkcija

- **Vertikalna asimptota.**

Prava $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije $f(x)$ ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Ako je $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$ onda govorimo o **desnoj** ili **levoj vertikalnoj asimptoti**.

- **Horizontalna asimptota.**

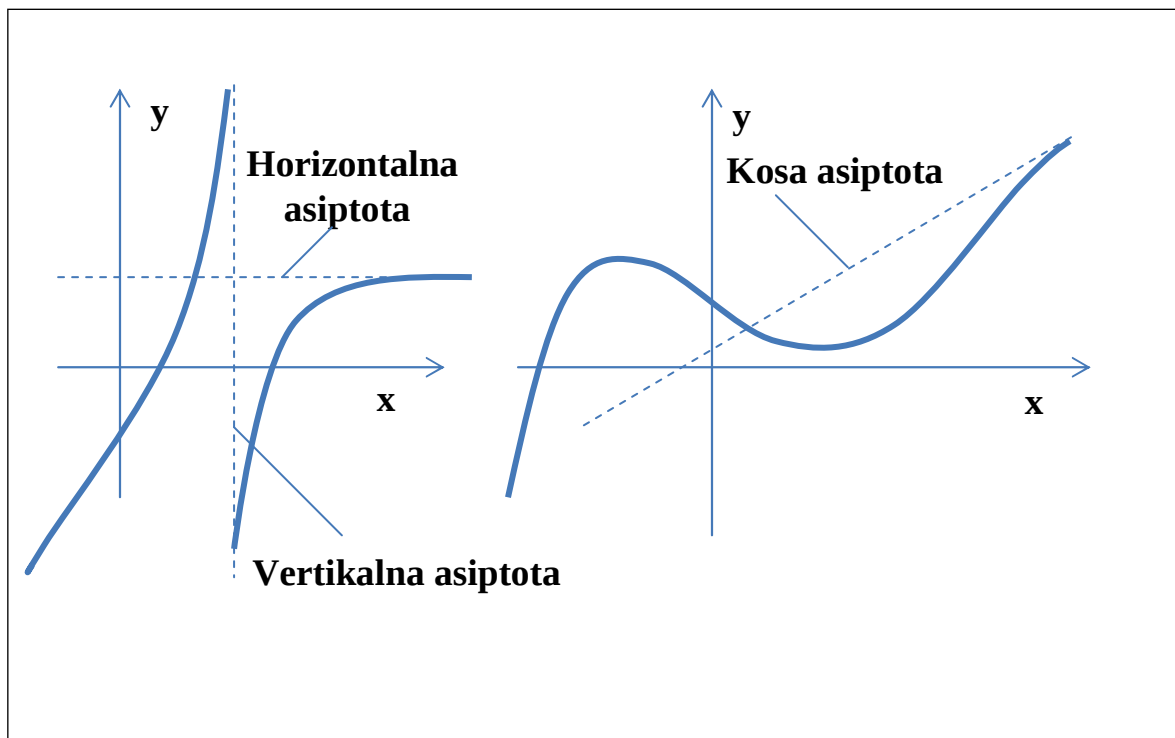
Prava $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije $f(x)$ ako je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

- **Kosa asimptota.**

Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** funkcije $f(x)$ ako postoji $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, a

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Napomena: Ako postoji horizontalna asimptota, ne postoji kosa i obrnuto



7. Odrediti asimptote funkcije $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

Rešenje:

Kako funkcija ima prekide za $x = \pm 1$, te prave mogu da budu vertikalne asimptote funkcije.

Proverimo:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Kako je kada $x \rightarrow \pm 1 \pm 0$ granična vrednost funkcije $\pm \infty$, funkcija ima dve vertikalne asimptote $x = \pm 1$.

Pošto je $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3}{x^2 - 1} = 0$, funkcija ima horizontalnu asimptotu, x - osu, tj pravu $y = 0$

7) Odrediti asimptote funkcija:

a) $y = \frac{1}{x-1}$ b) $y = \frac{x+3}{x+1}$ v) $y = \frac{2x^2-1}{x^2-4}$

Rešenje:

a) V.A. Funkcija ima prekid za $x = 1$.

Kako je $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ funkcija ima vertikalnu asimptotu $x=1$.

H.A. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, funkcija ima i horizontalnu asimptotu, x - osu, tj pravu $y=0$

b) V.A. $x=-1$ i H.A. $y=1$.

v) V.A. $x=\pm 2$ i H.A. $y=2$.

9) Odrediti kosu asimptotu funkcije $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x + 2}$

Rešenje:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - 4x + 5}{x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 + 2x} = 3 \neq 0,$$

funkcija ima kosu asimptotu, jer je $k=3 \neq 0$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x^2 - 4x + 5}{x + 2} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-10x + 5}{x + 2} = -10$$

Jednačina kose asimptote (leve i desne) je $y=3x-10$.

6. DIFERENCIJALNI RAČUN

6.1 IZVOD FUNKCIJE

Diferencijalni račun se pojavio u 17 veku. Danas predstavlja nezaobilazno sredstvo u rešavanju mnogih problema savremene nauke.

- Neka je Δx proizvoljna mala veličina koju nazivamo **priraštaj argumenta**. Kada se nezavisna promenljiva promeni od x do $x + \Delta x$, tada se funkcija promeni od $f(x)$ do $f(x + \Delta x)$, tj za veličinu $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, koja se naziva **priraštaj funkcije**.

- Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u okolini tačke x . Ako postoji granična vrednost

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

tada kažemo da je $f'(x)$ **prvi izvod funkcije** ili izvod funkcije $f(x)$ u datoj tački x .

- Postupak nalaženja izvoda naziva se **diferenciranje**.
- Ako je $f'(x)$ konačna vrednost, tada kažemo da je funkcija **diferencijabilna** u datoj tački.

Uobičajeno je da se priraštaj funkcije Δy i priraštaj argumenta Δx , kada $\Delta x \rightarrow 0$, obeležavaju sa dy i dx pri čemu se tada dy naziva diferencijal funkcije $f(x)$.

Izvod funkcije je granična vrednost (limes) količnika priraštaja funkcije Δy i priraštaja argumenta Δx kada priraštaj argumenta teži nuli,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Primer 1. Odrediti izvod funkcije $y = x^2$ po definiciji.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

LEVI I DESNI IZVOD

- Funkcija $f(x)$ je diferencijabilna u tački x ako i samo ako postoje konačne granične vrednosti, tj **desni i levi izvod funkcije u toj tački i ako su oni međusobno jednaki**,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_+(x) \quad \text{desni izvod,}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_-(x) \quad \text{levi izvod}$$

$$f'_+(x) = f'_-(x)$$

Primer 2. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x) = |x - 1|$ u tački $x = 1$.

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{((1 + \Delta x) - 1) - (1 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ i}$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-((1 + \Delta x) - 1) - (-1 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Kako je $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ zaključujemo da funkcija nije diferencijabilna u tački $x = 1$.

Funkcija $f(x)$ je diferencijabilna na nekom skupu ako i samo ako je diferencijabilna u svakoj tački tog skupa.

- Ako je funkcija $f(x)$ **diferencijabilna** u nekoj tački, onda je ona i **neprekidna** u toj tački. Obrnuto tvrđenje ne važi.

Primer 3. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x) = |x - 1|$ u tački $x = 1$.

Kako je $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ zaključujemo da funkcija nije diferencijabilna u tački $x = 1$, a je neprekidna u toj tački.

Primer 4. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ u tački $x = 0$.

Funkcija je neprekidna u tački $x = 0$, ali nije diferencijabilna jer

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x} \text{ ne postoji.}$$

6.2 OSNOVNA PRAVILA DIFERENCIRANJA

- Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u tački x , tada važe sledeća pravila:

$$\text{a) } y = c \cdot f(x) \Leftrightarrow y' = c \cdot f'(x), \quad c = \text{const}$$

$$\text{b) } y = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\text{v)} \quad y = f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{g)} \quad y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ i } g(x) \neq 0 \Leftrightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Dokaz:

$$\text{a)} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \end{aligned}$$

Izraz pod **g)** se dokazuje na sličan način.

TABLICA OSNOVNIH IZVODA

$y = \text{const}, y' = 0;$	$y = x^\alpha, y' = \alpha x^{\alpha-1},$ $\alpha \in R;$	$y = \cos x,$ $y' = -\sin x;$	$y = \arccos x,$ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$y = \sqrt{x}, y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	$y = a^x, y' = a^x \ln a;$	$y = \operatorname{tg} x,$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$y = \operatorname{arctg} x,$ $y' = \frac{1}{1+x^2};$
$y = e^x, y' = e^x;$	$y = \log_a x,$ $y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad 0 < a \neq 1;$	$y = \operatorname{ctg} x,$ $y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$y = \operatorname{arctg} x,$ $y' = -\frac{1}{1+x^2};$
$y = \ln x, y' = \frac{1}{x};$	$y = \sin x, y' = \cos x;$	$y = \arcsin x,$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Tablica izvoda je dobijena primenom definicije na pojedine funkcije

Primer 5. $y = C$, $C = \text{const}$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Primer 6. $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Primer 7. $y = \sin x$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

Primer 8. $y = a^x$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \\ &= a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a \end{aligned}$$

Napomena: Iz ovih primera vidimo da je traženje izvoda funkcije pomoću definicije veoma složen postupak. Zato koristimo tablicu izvoda i pravila za aritmetičke operacije.

Primer 9. Naći izvod sledećih funkcija:

a) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

b) $y = 4x^3 + 2x^2 - 3 + \sqrt{x}$

$$y' = (4x^3)' + (2x^2)' - (3)' + (\sqrt{x})' = 4 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 12x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

v) $y = x^2 \cos x$

$$y' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x = x(2 \cos x - x \sin x).$$

g) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

6.3 IZVOD INVERZNE FUNKCIJE

- Neka je funkcija $f(x)$ monotona i neprekidna u okolini tačke x , a diferencijabilna u tački x , tj $f'(x) \neq 0$.

Ako je $x = f^{-1}(y)$ inverzna funkcija funkcije $f(x)$, tada

izvod inverzne funkcije definišemo kao

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

Dokaz: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$, tj $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = 1$

Znajući da je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna, $\Delta y \rightarrow 0$ kada $\Delta x \rightarrow 0$, pa dobijamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = 1$$

$$f'(x) \cdot (f^{-1}(y))' = 1, \text{ tj } (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primer 10. $y = \arcsin x$

Kako je $x = \sin y$ inverzna funkcija funkcije $y = \arcsin x$ dobijamo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6.4 IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

- Ako je data složena funkcija $y = f(g(x))$ i ako su $y = f(u)$ i $u = g(x)$ diferencijabilne funkcije (funkcija $g(x)$ diferencijabilna u tački x , a funkcija $f(u)$ diferencijabilna u tački $u = g(x)$), onda je

$$y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

Dokaz:

$$\text{Neka je } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ tj } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Znajući da je funkcija $u = g(x)$ diferencijabilna, $\Delta u \rightarrow 0$ kada $\Delta x \rightarrow 0$, pa dobijamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ tj } y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

Primer 11. Naći složeni izvod sledećih funkcija:

a) $y = (1 - 2x)^{13}$

$$y' = 13(1 - 2x)^{12} \cdot (1 - 2x)' = -26(1 - 2x)^{12}.$$

b) $y = 3 \sin 4x$

$$y' = 12 \cos 4x \cdot (4x)' = 48 \cos 4x.$$

v) $y = \sin^4 x$

$$y' = 4 \sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4 \sin^3 x \cos x.$$

g) $y = e^{x^2 - 2x + 2}$

$$y' = e^{x^2 - 2x + 2} \cdot (x^2 - 2x + 2)' = (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 2}.$$

6.5 LOGARITAMSKI IZVOD

- Izvoda funkcije oblika $f(x) = g(x)^{h(x)}$ dobija se tako što se funkcija prvo logaritmuje :

$$\ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x),$$

zatim se traži njen izvod,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = f(x) \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right),$$

$$\left(g(x)^{h(x)} \right)' = \left(g(x)^{h(x)} \right) \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$$

- Izvod se može dobiti i korišćenjem pravila

- $g(x)^{h(x)} = e^{\ln g(x)^{h(x)}} = e^{h(x) \ln g(x)}.$

Primer 12. Naći izvod sledećih funkcija:

a) $y = x^x$

Prvi način:

$$\ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Leftrightarrow y' = y (\ln x + 1) \Leftrightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$$

Drugi način:

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

$$y' = \left(e^{x \ln x} \right)' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

b) $y = x^{\frac{1}{x}}$

$$y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

$$y' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} \right)' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

6.6 IZVOD IMPLICITNE FUNKCIJE

- Ako je funkcija zadata u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$ i diferencijabilna po promenljivim x i y , a $F'(x, y) \neq 0$, onda je

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \quad y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Primer 13. Naći izvod funkcije $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 y^2 = 0$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 4y^3 - 2x^2 y$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = -\frac{4x^3 - 2xy^2}{4y^3 - 2x^2 y}$$

Drugi način:

Kako je $4x^3 + 4y^3 y' = 2xy^2 + 2x^2 y'$, dobijamo

$$4y^3 y' - 2x^2 y' = 2xy^2 - 4x^3, \quad y'(4y^3 - 2x^2) = 2xy^2 - 4x^3, \quad y' = -\frac{4x^3 - 2xy^2}{2x^2 - 4y^3}$$

6.7 IZVOD PARAMETARSKI ZADATIH FUNKCIJA

Ne ka parametarski zadate funkcije $x = f(t)$ i $y = g(t)$ imaju izvode u tački iz intervala $t \in (m, n)$, pri čemu je $f'(t) \neq 0$, tada i funkcija $y = f(x)$ ima izvod u odgovarajućoj tački $x \in (a, b)$ i važi jednakost

$$f'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Primer 14.

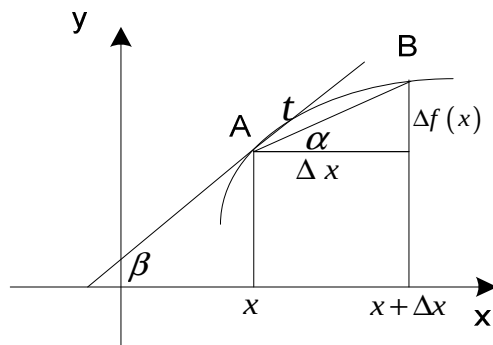
Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u parametarskom obliku jednačinama: $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 3t + 5$, $t \in \mathbb{R}$. Naći izvod funkcije $f(x)$ u tački $x = 3$.

Rešenje:

Za $x = 3$ dobije se $t = 1$. Traženi izvod je $f'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-3}{2}$ pa je $f'(3) = -\frac{1}{2}$

6.8 GEOMETRIJSKO ZNAČENJE IZVODA

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački x i definisana u nekoj njenoj okolini.



Koeficijent pravca sečice koja je povučena kroz tačke A i B iznosi $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, odnosno jednak je tangensu ugla koji sečica AB zaklapa sa x -osom.

Kada $\Delta x \rightarrow 0$, tačka B teži tački A , sečica AB postaje tangenta u tački A .

Koeficijent pravca tangente (prave) koja je povučena kroz tačku A iznosi $k_t = \operatorname{tg} \beta$. Kako

$\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \beta$, kada $\Delta x \rightarrow 0$ $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = y'(A)$, onda je to izvod funkcije $f(x)$ u tački A .

- Zaključujemo da je koeficijent pravca tangente u tački A , jednak vrednosti prvog izvoda u toj tački. Drugim rečima prvi izvod funkcije u tački je jednak brzini (trenutnoj) promene funkcije u toj tački.
- **Jednačina tangente u tački A glasi** $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$.
- **Jednačina normale u tački A glasi** $y - y_A = -\frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A)$.

Primer 15. Naći jednačinu tangentu funkcije $y = x^2 + 1$ u njenoj tački $A(1, 2)$.

Kako je $y' = 2x$, dobijamo $k_t = y'(A) = 2 \cdot 1 = 2$

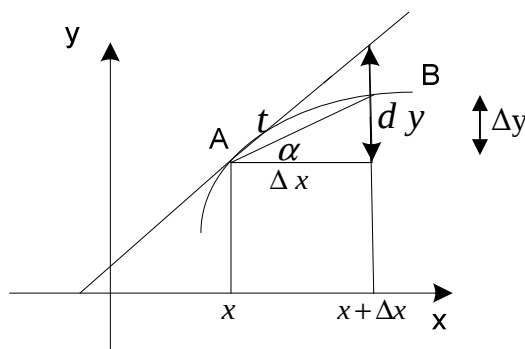
Jednačina tangente je prava koja prolazi kroz tačku A , a koeficijent pravca je $k_t = 2$.
 $y - 2 = 2(x - 1)$, odnosno $y = 2x$.

6.9 DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Ako funkcija $y = f(x)$ u nekoj tački x diferencijabilna, izraz $f'(x)\Delta x$ naziva se **diferencijalom** date funkcije u tački x . Označivši diferencijal funkcije sa dy imamo:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$dy = f'(x)dx$$



- Diferencijal funkcije $f(x) = x$ iznosi $dy = 1 \cdot \Delta x$, tj $dx = \Delta x$.
- Izvod funkcije se može definisati preko diferencijala kao $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, a diferencijal funkcije je:

$$d[f(x)] = f'(x)dx$$

- Diferencijal funkcije je proporcionalan priraštaju argumenta.

$$\Delta y \approx dy$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Dokaz: Znajući da je $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, dobijamo $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x)$, tj

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \text{ i uzimajući da je } dy = f'(x)\Delta x \text{ dobijamo } \Delta y \approx dy$$

Diferencijal funkcije je **linearna funkcija** priraštaja Δx , pa je mnogo jednostavnije odrediti diferencijal date funkcije nego njen priraštaj Δy . Ta činjenica se koristi u približnom računu.

- Za diferencijal funkcije važe slična pravila kao kod izvoda funkcije.

$$\begin{aligned}
 d(cf) &= cd(f) \\
 d(f \pm g) &= d(f) \pm d(g) \\
 d(f \cdot g) &= d(f) \cdot g + f \cdot d(g) \\
 d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}
 \end{aligned}$$

Primer 16. Naći diferencijal funkcije $y = 2x^3 + 3x$
 $dy = y'dx = (6x^2 + 3)dx$

Primer 17. Primenom diferencijala funkcije približno izračunati:
a) $\sin 31^\circ$ **b)** $\cos 59^\circ$

a) Koristićemo formulu $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Ako je funkcija $f(x) = \sin x$, tada je $d(\sin x) = \cos x dx = \cos x \Delta x$, pa je

$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x$. Za $x = 30^\circ$, $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ imamo:

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,515.$$

b) $f(x) = \cos x$, $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$. Tada je:

$$\cos 59^\circ = \cos(60^\circ - 1^\circ) \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,515.$$

6.10 IZVODI I DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

- Izvodi višeg reda funkcije $y = f(x)$ definišu se na sledeći način:

$$y^{(0)} = y \qquad y^{(n+1)} = (y^{(n)})' \quad n = 0, 1, 2K$$

- Diferencijali višeg reda funkcije $y = f(x)$ definišu se na sledeći način:

$$d^0 y = y \qquad d^{n+1} y = d(d^n y) \qquad n = 0, 1, 2K$$

- Za funkciju kažemo da je n puta diferencijabilna u tački x , ako postoji konačan k -ti izvod $f^{(k)}(x)$, za svako $k = 0, 1, 2K, n$.
- Ako su funkcije f i g n puta diferencijabilna u tački x , onda važe sledeća pravila:

$$(c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f(x)^{(n)}$$

$$(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f(x)^{(n)} \pm g(x)^{(n)}$$

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n-i)} g(x)^{(i)} \quad \text{Lajbnicova formula}$$

Primer 17. Odrediti drugi izvod funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

b) $f(x) = e^{-x^2}$,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (4x^2 - 2).$$

Primer 18. Odrediti treći izvod funkcija:

a) $f(x) = \cos^2 x$,

$$f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) = -\sin 2x, \quad f''(x) = -2 \cos 2x, \quad f'''(x) = 4 \sin 2x.$$

b) $f(x) = x^2 \ln x$,

$$f'(x) = 2x \ln x + x, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}.$$

Primer 19. Izračunati $f^{(5)}(0)$, gde je $f(x) = x^2 e^{2x}$

Rešenje

Za funkciju $f(x) = x^2 e^{2x}$ imamo redom

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} = 2(x^2 + x)e^{2x},$$

$$f''(x) = 2((2x+1)e^{2x} + 2(x^2+x)e^{2x}) = 2(2x^2 + 4x + 1)e^{2x},$$

$$f'''(x) = 2((4x+4)e^{2x} + 2(2x^2+4x+1)e^{2x}) = 4(2x^2 + 6x + 3)e^{2x},$$

$$f^{(4)}(x) = 4((4x+6)e^{2x} + 2(2x^2+6x+3)e^{2x}) = 16(x^2 + 4x + 3)e^{2x},$$

$$f^{(5)}(x) = 16((2x+4)e^{2x} + 2(x^2+4x+3)e^{2x}) = 32(x^2 + 5x + 5)e^{2x}.$$

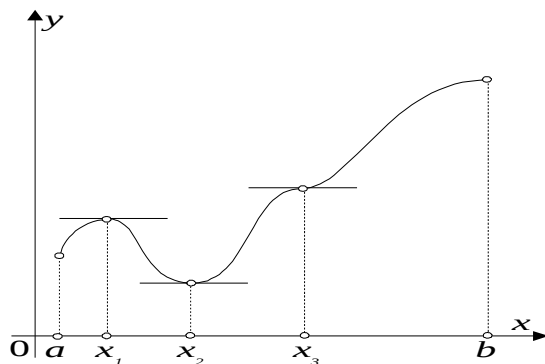
Na osnovu dobijenog izvoda nalazimo da je $f^{(5)}(0) = 160$.

6.11 MONOTONOST I EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE

MONOTONOST FUNKCIJE (RAŠĆENJE I OPADANJE)

- Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diferencijabilna na (a, b) . Tada je f
 1. rastuća ako je $(\forall x \in (a, b)) f'(x) > 0$.
 2. opadajuća ako je $(\forall x \in (a, b)) f'(x) < 0$.

EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE



- Maksimum i minimum funkcije $f(x)$ su tačke u kojima funkcija menja smisao monotonosti, tj prelazi iz opadanja u rašćenje i obrnuto.
- Maksimum i minimum funkcije nazivaju se **ekstremumima** ili **ekstremnim vrednostima** date funkcije.
- **Neophodni uslov za ekstremum.**

Ako diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ ima u tački $x = x_1$ ekstremum (maksimum ili minimum), tada je u toj tački $f'(x_1) = 0$, (Fermaova teorema).

Iz navedene teoreme sledi da, ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna, da tada ona može imati ekstremum samo u tačkama u kojima je njen izvod jednak nuli; obratan zaključak ne važi. Naime, ako je $f'(x) = 0$, ne mora značiti da ta tačka predstavlja ekstremum funkcije.

Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ nazivaju se **stacionarnim tačkama**.

- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u nekom intervalu koji sadrži stacionarnu tačku x_1 tog intervala i diferencijabilna u tom intervalu i ako je:
 1. $f'(x) > 0, x < x_1$, i $f'(x) < 0, x > x_1$, tada je $f(x_1) = \max f(x)$,
(Drugi izvod u toj tački je manji od nule)
 2. $f'(x) < 0, x < x_1$, i $f'(x) > 0, x > x_1$, tada je $f(x_1) = \min f(x)$;
(Drugi izvod u toj tački je veći od nule)

što znači, ako izvodna funkcija $f'(x)$ menja znak pri prolasku kroz tačku x_1 tada funkcija $f(x)$ ima ekstremum u tački x_1 .

Dakle, pri ispitivanju ekstremuma funkcije $y = f(x)$ pomoću prvog izvoda određujemo:

1. $f'(x)$,
2. stacionarne tačke iz $f'(x) = 0$ i tačke prekida izvodne funkcije $f'(x)$,
3. znak izvoda $f'(x)$ sa obe strane kritičnih tačaka,
4. vrednost funkcije $f(x)$ za svaku od kritičnih tačaka. (to su ekstremi ako postoje)
5. Vrednost drugog izvoda u stacionarnim tačkama:
 - a) $y'' > 0$ - radi se o minimumu;
 - b) $y'' < 0$ - radi se o maksimumu
 - v) $y'' = 0$, mora se tražiti izvod višeg reda. Ako je neparni izvod višeg reda različit od nule funkcija u toj tački ima prevojnu tačku ili tačku infleksije tj. prelazi iz konkavnosti u konveksnost ili obrnuto (nema ekstrem u toj tački).

Примена извода за одређивање екстрема функције

Primer 20. Испитати монотоност и одредити екстреме функције $y = x^3 - 3x + 1$.

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \text{ Nule prvog izvoda su } x = 1, x = -1.$$

$$y'' = 6x, \quad y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{U toj tački je minimum funkcije}$$

$$y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{U toj tački je maksimum funkcije}$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$x-1$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
y'	+	-	+
y			

Na osnovu tablice zaključujemo da funkcija na traženom intervalu opada za $x \in (-1, 1)$, raste za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Funkcija ima maksimum $y = 3$ za $x = -1$, minimum $y = -1$ za $x = 1$.

6.12 ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE

Ispitivanje osobina funkcija i crtanje grafika radimo kroz sledeće korake:

1. Određivanje domena funkcije.
2. Određivanje nula i ispitivanje znaka funkcije
3. Ispitivanje parnosti i neparnosti funkcije.
4. Ispitivanje ponašanja funkcije na krajevima oblasti definisanosti i određivanje asimptota funkcije
5. Ispitivanje monotonosti i određivanje ekstrema funkcije primenom izvoda funkcije
6. Skiciranje grafika funkcije.

ZADACI

- 1 Dokazati da funkcija $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10$ nema ekstremnih vrednosti

Rešenje:

Prvi izvod glasi $y' = 3x^2 - 6x + 6$. Da bi funkcija imala ekstreme potrebno je da $y' = 3x^2 - 6x + 6 = 0$. Ova jednačina nema realnih rešenja, nema stacionarnih tačaka, pa samim tim ni ekstrema.

- 2 Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = x^2 - 18x + 5$.

Rešenje:

Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 2x - 18$.

$f'(x) = 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ je stacionarna tačka i mogući ekstrem. Da bi ova vrednost predstavljala ekstrem funkcije mora da u njoj dođe do promene znaka prvog izvoda. Zaista za $x < 9$, $f'(x) < 0$ i funkcija opada, a za $x > 9$, $f'(x) > 0$ i funkcija raste. Zaključujemo da funkcija u tački $x = 9$ ima minimum koji iznosi $f_{\min}(9) = -76$.

- 3 Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Rešenje:

Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Nule prvog izvoda funkcije su $x = 3$, $x = -1$.

Drugi izvod funkcije je $f''(x) = 6x - 6$.

Kako je $f''(3)=12>0$, a $f''(-1)=-12<0$, funkcija za $x=3$ ima minimum $f_{\min}=f(3)=-22$, a za $x=-1$ ima maksimum $f_{\max}=f(-1)=10$.

4. Odrediti ekstremne tačke i intervale monotonosti funkcije $y=2x^3+3x^2-12x+1$.

Rešenje:

$y'=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$. Nule prvog izvoda su $x=-2$, $x=1$.

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x+2$	-	+	+
$x+1$	-	-	+
y'	+	-	+
y	Z	]]	Z

Na osnovu tablice zaključujemo da funkcija ima maksimum za $x=-2$, $f_{\max}(-2)=21$ minimum za $x=1$, $f_{\min}(1)=-6$

5. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $y=x^4-2x^2+5$ na intervalu $[-2, 2]$.

Rešenje:

Vrednosti funkcije u krajnjim tačkama intervala su $y(-2)=y(2)=13$.

$y'=4x^3-4x$ i moguće ekstreme funkcije dobijamo kao nule prvog izvoda. $4x^3-4x=0$, $x=0$, $x=\pm 1$.

$y_{\max}(0)=5$, $y_{\max}(-1)=4$, $y_{\min}(1)=4$. Prema tome najveća vrednost na intervalu je $y=13$, a najmanja vrednost na intervalu je $y=4$.

6. Ispitati i grafički prikazati sledeće funkcije:

a) $y=x^3+6x^2+9x$,

b) $y=x^4-2x^2+3$,

c) $y=x^3-6x^2+9x-4$,

d) $y=x^2(3-x)$.

Rešenje:

a) $y=x^3+6x^2+9x$

Domen: $D_x: \forall x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y=0 \Leftrightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Leftrightarrow x(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u koordinatnom početku.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

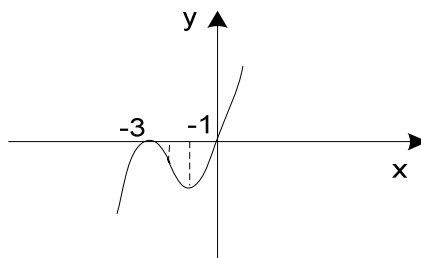
Asimptote: Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 3x^2 + 12x + 9$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$3x^2 + 12x + 9$	+	-	+
y'	+	-	+
y	Z	]]	Z

Za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ $y' > 0$ i $y \uparrow$, za $x \in (-3, -1)$ $y' < 0$ i $y \downarrow$.

$$y_{\max}(-3) = 0, y_{\min}(-1) = -4.$$



b) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

Domen: $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: Funkcija nema realnih nula..

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, 3)$.

Znak funkcije: $y > 0$ za $\forall x \in D_x$.

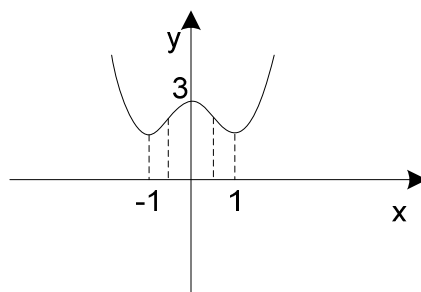
Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Asimptote: Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$x^2 - 1$	+	-	-	+
x	-	-	+	+
y'	-	+	-	+
y	]]	Z	]]	Z

$$y_{\max}(0) = 3, y_{\min}(\pm 1) = 2$$



c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

Domen: $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, -4)$.

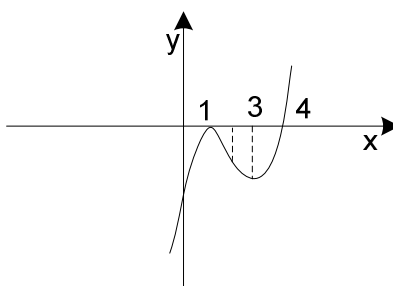
Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 4)$, $y < 0$, a za $x \in (4, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+
y'	+	-	+
y	Z	]]	Z

$y_{\max}(1) = 0, y_{\min}(3) = -4$.



d) $y = x^2(3-x)$

Domen: $D_x : \forall x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, 0)$.

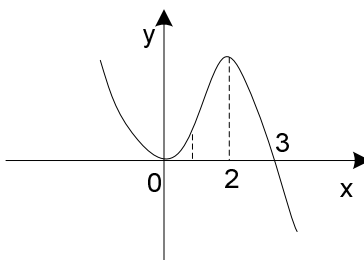
Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 3)$ $y > 0$, a za $x \in (3, \infty)$ $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 6x - 3x^2$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0, 2)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$

$$y_{\max}(2) = 4, y_{\min}(0) = 0.$$



7. a) $y = \frac{2x}{1+x^2}$, b) $y = \frac{3}{x^2-1}$, c) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$,

d) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$, e) $y = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

Rešenje:

a) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

Domen: $1+x^2 > 0$, $D_x: \forall x \in \mathbb{R}$.

Parnost, neparnost: $y(x) = -y(-x)$ funkcija je neparna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u koordinatnom početku.

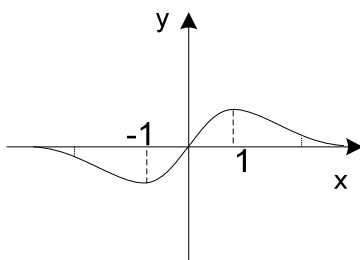
Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ pa je $y = 0$ (x -osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$1-x^2$	-	+	-
y'	-	+	-
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$$y_{\min}(-1) = -1, y_{\max}(1) = 1.$$



b) $y = \frac{3}{x^2 - 1}$

Domen: $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Nule funkcije: Funkcija nema nule.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y > 0$, a za $x \in (-1, 1)$ $y < 0$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$, funkcija je parna.

Asimptote funkcije: $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{3}{x^2 - 1} = +\infty$.

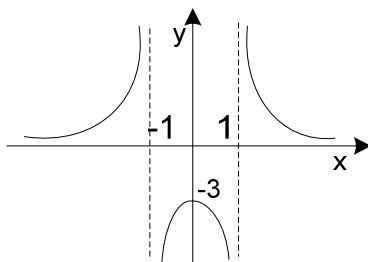
Prave $x = \pm 1$ su vertikalne asimptote funkcije.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, pa je prava $y = 0$, tj. x - osa horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$.

$y_{\max}(0) = -3$.



c) $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$

Domen: $D_x : x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Presek sa y osom: $y(0) = -1$.

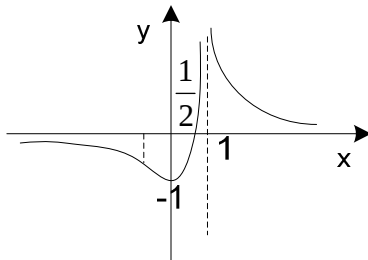
Znak funkcije: Za $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y > 0$, a za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow 1\pm} y = +\infty$, pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \downarrow$, a za $x \in (0, 1)$, $y' > 0$ i $y \uparrow$, $y_{\min}(0) = -1$.



d) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Domen: $D_x : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Presek sa y osom: $y(0) = 4$.

Znak funkcije:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x^2 - 4$	-	+	+	+	-
$x^2 - 1$	-	-	+	-	-
y	+	-	+	-	+

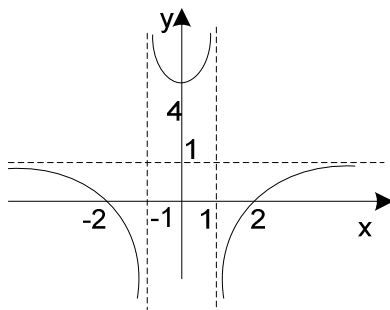
Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -\infty$ pa su prave $x = \pm 1$ vertikalne asimptote.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0)$, $y' < 0$ i $y \downarrow$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \uparrow$.

$y_{\min}(0) = 4$.



e) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$

Domen: $D_x : x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Presek sa y osom: Funkcija ne seče y - osu.

Znak funkcije: Za $x \in (-1, 0) \cup (2, 3)$, $y > 0$, za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$, $y < 0$.

Parnost neparnost: $y(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) - 3}{2(-x) - (-x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{-2x - x^2} \neq y(x) \neq -y(x)$. Funkcija nije ni parna ni neparna.

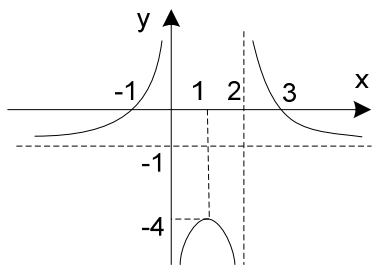
Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1$ pa je $y = -1$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$ pa su $x = 0$ i $x = 2$ vertikalne asimptote.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{6(1-x)}{(2x-x^2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Za $x \in (-\infty, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$.

$y_{\max}(1) = -4$.



6.13 OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Lopitalova teorema

- Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u nekoj okolini tačke a , pri čemu je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ili $(\pm\infty)$ i $g'(a) \neq 0$, tada je:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz:

Dokažimo teoremu samo u slučaju " $\frac{0}{0}$ ".

Kako je $f(a) = g(a) = 0$, važi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$.

Na osnovu Košijeve teoreme tada postoji bar jedna tačka c takva da je $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$,

tj. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, odakle dobijamo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju n -te izvode koji su neprekidni u tački $x = a$ i ako je $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = K = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$ i $g^{(n)}(a) \neq 0$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Napomena: U slučaju neodređenosti tipa " $0 \cdot \infty$ " i " $\infty - \infty$ ", funkcija se mora transformisati u oblik " $\frac{0}{0}$ " ili " $\frac{\infty}{\infty}$ ", pa zatim primeniti Lopitalova teorema. U slučaju neodređenosti " 0^0 ", " 1^∞ " ili " ∞^0 ", funkcija se prvo logaritmuje čime se svodi na jedan od pomenutih slučajeva.

Primer 21. Primenom Lopitalove teoreme odrediti granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{1} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} x} = e^0 = 1$$

Među najvažnije teoreme diferencijalnog računa spadaju teoreme **srednje vrednosti**. One pokazuju da se iz same egzistencije izvoda funkcije može mnogo zaključiti o osobinama funkcije.

Ove teoreme prevazilaze okvire ovog materijala i neće biti razrađivane.

7. NEODREĐENI INTEGRAL

7.1 POJAM PRIMITIVNE FUNKCIJE I NEODREĐENOG INTEGRALA

Ovde se razmatra obrnut problem problemu diferenciranja. Tražimo funkciju čiji je izvod odnosno diferencijal poznat.

Definicija: Funkcija $F(x)$ je **primitivna funkcija** funkcije $f(x)$ na intervalu $(a, b) \in \mathbb{R}$, ako u svakoj tački tog intervala važi jednakost

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pri čemu je } F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ onda je to i funkcija $F(x) + C$ (gde je C proizvoljna konstanta), jer je

$$\frac{d}{dx} [F(x) + C] = f(x)$$

$$d[F(x) + C] = f(x)dx$$

$$\int d[F(x) + C] = \int f(x)dx$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

$$I = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Definicija: Integral funkcije $f(x)$ je skup svih njenih primitivnih funkcija $F(x) + C$.

Konstanta integracije C se određuje iz datih vrednosti funkcije za određenu vrednost nezavisno promenljive (iz tzv. početnih uslova).

Primer 1. a) Funkcija $F(x) = \arcsin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ za $x \in (-1, 1)$, jer je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Funkcija $F(x) = \sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$, jer je $(\sin x)' = \cos x$.

7.2 OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ odnosno $[\int f(x)dx]' = f(x)$,
2. $\int dF(x) = F(x) + C$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
4. $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

U tablicama se daju vrednosti integrala osnovnih funkcija. Prilikom rešavanja integrala ostalih funkcija oni se određenim transformacijama svode na integrale osnovnih funkcija. Videli smo da su izvodi prostih funkcija proste funkcije. Kod integrala prostih funkcija ne mora da se dobiju proste funkcije.

7.3 TABLICA OSNOVNIH INTEGRALA

1. $\int dx = x + C,$
2. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ili $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
12. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
17. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Metode integracije

Integracija ili integraljenje funkcija može da se vrši sledećim metodama:

- **Direktna integracija,**
- **Integracija smenom promenljive,**
- **Parcijalna integracija**

7.4 DIREKTNA INTEGRACIJA

Ova metoda se koristi kod jednostavnih funkcija koje se lako svode na tablične integrale.

Primer. 2. Neka je $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7$, tada je

$$\begin{aligned} \int (5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) dx &= \\ \int 5x^3 dx + \int 2x^2 dx - \int 3x dx + \int 7 dx &= \\ 5 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 7 \int dx &= \\ 5 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 7x + C. \end{aligned}$$

Primer 3. Neka je $f(x) = \sqrt{x}$, tada je

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

Primer 4. $I = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - \arctg x + C \end{aligned}$$

7.5 INTEGRACIJA SMENOM PROMENLJIVE

Ova metoda smene promenljive sastoji se u zameni promenljive x novom promenljivom $g(t)$ koja je strogo monotona i diferencijabilna funkcija:

$$\int f(x) dx = \int g(t) g'(t) dt$$

Nakon integracije vraćamo se na prvobitnu promenljivu.

Primer 5. Izračunati integral $I = \int e^{2x} dx$.

Uvedimo smenu: $2x = t$.

Tada sledi da je :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}t, \\ dx &= \left(\frac{1}{2}t \right) dt = \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$\int e^{2x} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

Primer 6. Izračunajmo integral $\int (ax + b)^n dx$.

$$\int (ax + b)^n dx = \left\{ \begin{array}{l} ax + b = t \\ adx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \int t^n \frac{1}{a} dt =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ponekad je podintegralna funkcija takvog oblika da je moguće primeniti neku od sledećih formula na osnovu metoda smene.

$$(I) \quad \int f(x) \cdot f'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} [f(x)]^2 + C.$$

$$(II) \quad \int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$(III) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|f(x)| + C.$$

Primer 7.

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

Primer 8.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Primer 9. $\int \operatorname{tg} x dx = ?$

Ovde se koristi identitet $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, a zatim uvedemo smenu

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Primer 10. $\int \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2} dy = ?$

Očigledno je da se bez znanja izvoda teško može razumeti metoda smene.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} y = t \\ \frac{1}{1+y^2} dy = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \boxed{\frac{(\operatorname{arctg} y)^2}{2} + C}$$

Primer 11. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+4} = ?$

Ovde uz dx imamo x^2 i znamo da je $(x^3)' = 3x^2$ a da u imeniocu nemamo x^3 .

Zato ćemo malo prepraviti imenilac da bi dobili x^3 ...

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4} = \int \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4}$$

Ovde ćemo upotrbiti tablični integral $\int \frac{1}{a^2 + t^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$,
ali moramo prvo drediti a .

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \boxed{\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C}$$

Primer 12. $\int \frac{1}{25+x^2} dx = ?$

Očigledno je vrednost a u tabličnom integralu $a = 5$

$$\int \frac{1}{25+x^2} dx = \int \frac{1}{5^2+x^2} dx = [\text{ovde je dakle}] = \boxed{\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C}$$

Primer 13. $\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}} dx = ?$

$$\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{15})^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{15}} + C$$

Primer 14. $\int \sin ax dx = ?$

$$\begin{aligned} \int \sin ax dx &= \left| \begin{array}{l} ax = t \\ a dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{a} \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int \sin t dt = \frac{1}{a} (-\cos t) + c = \boxed{-\frac{1}{a} \cos ax + C} \end{aligned}$$

Primer 15. $\int \sin^2 x dx = ?$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int 1 \cdot dx - \int \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C \\ &= \boxed{\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C} \end{aligned}$$

Primer 16. $\int \cos^2 x dx = ?$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2x] dx = \frac{1}{2} \left[\int 1 \cdot dx + \int \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C = \boxed{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}\end{aligned}$$

Primer 17. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Ovaj zadatak se može rešiti na više načina, a jedan od načina je sledeći:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Sada već imamo očiglednu smenu...

$$\int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Ovo je tablični integral $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|$$

Integrali koji sadrže kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$

Integrali oblika $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ i $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, takođe se uspešno rešavaju metodom smene promenljive, ali se oni rade i u poglavlju o integraciji racionalnih funkcija.

Transformišemo kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$,

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + K^2 \right],\end{aligned}$$

gde je $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm K^2$.

Zamenom promenljive $x + \frac{b}{2a} = t \Rightarrow dx = dt$ navedeni integrali se svode na:

$$(1) \quad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm K^2},$$

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a} \sqrt{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]}} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm K^2}}.$$

U zavisnosti od koeficijenta K^2 odnosno koeficijenata a, b i c integral (1) se svodi na jedan od tabličnih 12. ili 13. a integral (2) na 19.

Primer 18. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = ?$

U trinomu $x^2 - 6x + 13$ je $a = 1, b = -6, c = 13$, pa to zamenimo u izraz

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \left(x + \frac{-6}{2 \cdot 1} \right)^2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 13 - (-6)^2}{4 \cdot 1} = (x - 3)^2 + \frac{52 - 36}{4} = (x - 3)^2 + 4$$

Lakše je naravno izvršiti dopunu do punog kvadrata, dodamo i oduzmemo koeficijent uz x

podeljen sa 2 pa to na kvadrat. $\left(\frac{\text{koeficijent uz } x}{2} \right)^2$

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 13 = (x - 3)^2 + 4$$

Uz x je 6, pa dodajemo i oduzimamo $\left(\frac{6}{2} \right)^2 = 9$

Vraćamo se u integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} x - 3 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C$$

Primer 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} = ?$

$$2x^2 - 6x + 5 = 2 \left(x^2 - 3x + \frac{5}{2} \right) = 2 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} \right) = 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} &= \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{2 \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \left| x - \frac{3}{2} = t \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Ovo je tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{2x^2 - 6x + 5} \right| + C
 \end{aligned}$$

Ako smo rekli ova dva tipa integrala, možemo rešiti i sledeće tipove integrala:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx^2 + c} dx \quad \text{ i } \quad I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx^2 + c}} dx$$

Oni se redom svod na prethodna dva integrala:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx^2+c} dx \quad \text{ se svodi na integral } I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx^2+c},$$

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx^2+c}} dx \quad \text{ se svodi na integral } I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx^2+c}}$$

Primer 20. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = ?$

Ideja je da se izraz u brojiocu $Ax+B$ napravi da bude izvod izraza u imeniocu $ax^2 + bx + c$. To se radi tako što se ispred integrala izvuče $\frac{A}{2a}$.

U našem primeru imamo $x^2 + x + 1$ u imeniocu, njegov izvod je $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, što znači da u brojiocu treba da napravimo $2x+1$, odnosno da izvučemo $\frac{A}{2a} = \frac{1}{2}$ ispred integrala!

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \right)
 \end{aligned}$$

Sada se problem sveo na rešavanje dva integrala, gde prvi uvek radimo smenom, a drugi je tipa I_4 .

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \left| \begin{matrix} x^2+x+1=t \\ (2x+1)dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|x^2+x+1|$$

Ovaj drugi smo već rešavali:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Vratimo se na zadatak:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln|x^2+x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Zadaci

$$\boxed{1} \quad \int \frac{2x}{x^2+12} dx = ?$$

Vidimo da uz dx imamo izraz $2x$. Razmišljamo od čega je izvod $2x$? Znamo da je $(x^2)' = 2x$ i to ćemo izabrati kao smenu. Još pogodnije je da uzmemo ceo izraz x^2+12 da nam bude smena jer je izvod od konstante 0. $\left[(x^2+12)'\right] = 2x$

$$I = \int \frac{2x}{x^2+12} dx = \left| \begin{matrix} x^2+12=t \\ 2xdx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C =$$

kad rešimo integral `po t`, onda vratimo smenu i dobijemo rešenje `po x`

$$I = \ln|x^2+12| + C$$

$$\boxed{2} \quad \int \frac{x^2}{x^3+1} dx = ?$$

I ovde slično razmišljamo, izvod od x^3+1 je $3x^2$ i to je pogodno za smenu.

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \left| \begin{array}{l} x^3+1=t \\ 3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \boxed{\frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C}$$

$$\boxed{3} \quad \int \frac{1}{x+5} dx = ?$$

Ovaj integral liči na tablični $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ali umesto x u imeniocu imamo $x+5$. Zato je pogodno bas taj izraz uzeti za smenu:

$$\int \frac{1}{x+5} dx = \left| \begin{array}{l} x+5=t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \boxed{\ln|x+5| + C}$$

Vezano za ovakve integrale mozemo izvesti jedan zaključak: $\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a| + C$

$$\boxed{4} \quad \int \frac{1}{(x+5)^3} dx = ?$$

Ovaj integral je sličan prethodnom, ali pazite jer u imeniocu je stepen izraza pa on 'ne ide' u ln.

$$\int \frac{1}{(x+5)^3} dx = \left| \begin{array}{l} x+5=t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2 \cdot t^2} + C = -\frac{1}{2 \cdot (x+5)^2} + C$$

$$\boxed{5} \quad \int \sin^2 x \cdot \cos x dx = ?$$

Uz dx imamo $\cos x$, a kako znamo da je izvod od $(\sin x)' = \cos x$, jasno je da će to biti i smena.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \boxed{\frac{\sin^3 x}{3} + C}$$

$$\boxed{6} \quad \int e^{-x^3} x^2 dx = ?$$

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = \left| \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{-3} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = \boxed{-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C}$$

7.6 PARCIJALNA INTEGRACIJA

Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije nezavisne promenljive x na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$

Po pravilu izvoda proizvoda funkcija imamo da je

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v) dx = (u \cdot v' + u' \cdot v) dx = u \cdot (v' dx) + v(u' dx) = u dv + v du$$

Integracijom dobijamo

$$\int d(u \cdot v) = \int (u dv + v du)$$

Odakle je

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ \int u'v &= uv - \int v' u \end{aligned} \quad (*)$$

Dobijenu formulu zovemo formula parcijalne integracije.

Praktičan značaj formule (*) je u tome da je ponekad pogodno podintegralnu funkciju $f(x)$ prikazati kao proizvod neke funkcije $u(x)$ i izvoda $v'(x)$, neke druge funkcije $v(x)$. Tada se rešavanje integrala $\int f(x) dx$ svodi na rešavanje integrala $\int u dv$.

Primer 1. $I = \int x \cdot e^x dx$

$$\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Primer 2. $\int x \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Integrale oblika $\int e^{Kx} \cos ax dx$ i $\int e^{Kx} \sin ax dx$,

takođe rešavamo pravilom parcijalne integracije.

Primer 3. Izračunajmo integrale $I_1 = \int e^x \cos ax dx$ i $I_2 = \int e^x \sin ax dx$. Za I_1 dobijamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^x \cos ax dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \cdot \sin x - I_2 \end{aligned}$$

Rešavajući analogno integral I_2 dobijamo

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^x \sin ax dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \\ &= -e^x \cdot \cos x - \int e^x \cos x dx = -e^x \cdot \cos x - I_1 \end{aligned}$$

Možemo sada postaviti sistem jednačina

$$\begin{aligned} I_1 &= e^x \cdot \sin x - I_2 \\ I_2 &= -e^x \cdot \cos x - I_1 \end{aligned}$$

Gde su nepoznate I_1 i I_2 traženi integrali. Rešavanjem sistema jednačina dobijamo

$$I_1 = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

$$I_2 = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Da bismo pogodno birali u i dv , imamo sledeće grupe primera

1. **GRUPA** Ovde ćemo birati da je x ili polinom od x jednak u , a sve ostalo je dv

$$\int x \cos x dx, \int (1-x) \sin x dx, \int x e^x dx, \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \int (x^2 - 2x + d) e^{-x} dx \text{ itd}$$

2. **GRUPA** Ovde ne uzimamo polinom od x za u , već funkciju pored : $\ln x = u$,

$$\arcsin x = u, \arctg x = u, \text{ a sve ostalo je } dv.$$

$$\int x \ln x dx, \int \arcsin x dx, \int x^2 \arctg x dx, \int x^3 \ln x dx \text{ itd.}$$

3. **GRUPA** Ovde ćemo uzimati $dx = dv$, a unutrašnja funkcija je u , kao u 2. Grupi

$$\text{Na primer : } \int \ln x dx, \int \ln^2 x dx, \int \arctg x dx, \int \arcsin x dx \text{ itd.}$$

4. **GRUPA** To su kružni integrali, koji uvek imaju svog “para” preko koga se dati integral vraća na početak...

$$\text{Na primer : } \int e^x \sin x dx, \int e^x \cos x dx, \int \sin (\ln x) dx, \int \cos (\ln x) dx \text{ itd.}$$

Jasno je da je urađeni primer $\int x e^x dx$ pripada ovoj grupi

$$\text{Primer 4.} \quad \int (1-x) \sin x dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int (1-x) \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} 1-x = u, & \sin x dx = dv \\ -dx = du, & \int \sin x dx = v \\ dx = -du, & -\cos x = v \end{array} \right| = uv - \int v du = \\ &= (1-x)(-\cos x) - \int \cos x (-dx) = (x-1)\cos x - \sin x + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \\ \frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \end{array} \right| \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = v = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

7.7 INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Neka svojstva racionalnih funkcija

Navedimo neka svojstva racionalnih funkcija koja se koriste prilikom integracije. Svojstva navodimo bez dokaza.

Racionalna funkcija je oblika $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Može biti **prava i neprava**.

Prava racionalna funkcija je ona kod koje je maksimalni stepen polinoma $P(x)$ manji od

maksimalnog stepena polinoma $Q(x)$, kao na primer: $\frac{x}{x^2-3}, \frac{x^2-3x+12}{x^3+5x^2-2x+1},$

$$\frac{4}{x^5 + 5x^2 - 22x + 31} \text{ itd.}$$

Neprava racionalna funkcija je ona kod koje je max stepen $P(x)$ veći ili jednak sa max

stepenom $Q(x)$, kao na primer: $\frac{x^2+2x-7}{x^2-13}$, $\frac{x^2-3x+12}{2x+1}$, $\frac{x^4+75x^2-14}{x+3}$ itd.

U slučaju da je zadata nepravna racionalna funkcija **moramo** podeliti ta dva polinoma, dobiti rešenje polinom plus prava racionalna funkcija.

Svaku racionalnu funkciju $\frac{P(x)}{Q(x)}$ možemo da napišemo u obliku $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ gde je

$T(x)$ polinom, a $\frac{r(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $r(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$.

Razlomak oblika $\frac{r(x)}{Q(x)}$ često se naziva pravim razlomkom. Ako je $Q(x) = x - a$ tada se

polinom može napisati u obliku $P(x) = T(x)(x - a) + r$ gde je $r \in R$ konstanta.

Ako je $r = 0$ polinom $P(x)$ je deljiv sa $(x-a)$.

Polinom $P(x)$ deljiv je sa $(x-a)$ ako i samo ako je $P(a)=0$

Svaki polinom stepena $n \geq 1$ ima tačno n nula realnih ili kompleksnih.

Integraciju prave racionalne funkcije vršimo tako sto:

Imenilac rastavimo na činioce korišćenjem transformacija kao što su:

- Izvlačenje zajedničkog člana ispred zagrade
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ako nam je data kvadratna jednačina
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ili $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ razlika, odnosno zbir kubova i slično.
- Koristimo Bezuovu teoremu ili sklapamo „dva po dva“ ako je polinom većeg stepena

Pravu racionalnu funkciju rastavljamo na sledeći način

Ako su u imeniocu svi faktori linearni bez stepena, svaki ide sa po jednim slovom: A,B,C...

$$\frac{P(x)}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}.$$

Ako u imeniocu imamo linearne članove, ali sa stepenom, rastavljamo dok ne dođemo do najvećeg stepena:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x+7)}.$$

Ako u imeniocu imamo nerazloživ polinom, za njega moramo da uzmemo izraz tipa $Bx + C$

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Ako je nerazloživ činilac u imeniocu na kvadrat moramo da ga uzimamo dva puta u razlaganju:

$$\frac{P(x)}{(x-7) \cdot (x^2+5)^2 \cdot x^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2} + \frac{F}{x} + \frac{G}{x^2} + \frac{H}{x^3}$$

Integraljenje tako razložene racionalne funkcije se radi prema navedenim metodama integracije.

Primer 1. $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx = ?$

Ovde se radi o pravoj racionalnoj funkciji. Prvo imenilac rastavimo na činioce!

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Dakle, naš integral je $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = ?$

Izvučemo racionalnu funkciju:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \text{ sve pomnožimo sa } x(x-1)(x+1)$$

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x-3 = A(x^2-1) + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$$

Iz jednakosti polinoma sa leve i desne strane znaka jednakosti nalaze vrednosti nepoznatih koeficijenata

$$x-3 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx,$$

“sklopimo “ uz x^2 pa one uz x , pa slobodne članove...

$$x-3 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A,$$

sad vršimo upoređivanje: članovi uz x^2 , pa uz x , pa bez x

$$A+B+C=0$$

$$B-C=1$$

$$-A=-3$$

Rešenjem ovog sistema jednačina dobije se:

$$A = 3,$$

$$B = -1,$$

$$C = -2.$$

Uvrstimo rešenja, a zatim završimo integraciju koja je obično jednostavna:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx =$$

$$3 \ln|x| - \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C$$

Primer 2.

Razložimo na proste razlomke $\frac{-2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x^2(x-1)}$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + x - 2 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-A)x - B \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} A+C = -2 & B-A = 1 & -B = -2 \\ A = 1 & B = 2 & C = -3 \end{array}$$

$$\frac{-2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x-1}$$

Na osnovu prethodnog sledi da se svaka racionalna funkcija može razložiti na zbir polinoma i prostih razlomaka. Dakle, integracija racionalne funkcije svodi se na integraciju polinoma i prostih razlomaka.

Primer 3.

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx = ?$$

$$\frac{x+2}{x^3 - 2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2A)x - 2B \end{aligned}$$

$$A+C = 0, B-2A = 1, -2B = 2$$

$$A = -1, B = -1, C = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + c \end{aligned}$$

7.8 INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Izvesni oblici iracionalnih funkcija mogu se integraliti svođenjem na integraciju racionalnih izborom pogodne smene promenljive.

Bez namere da se detaljnije bavimo ovim integralima ovde ćemo razmotriti primer koji se najčešće javlja posebno u određenim integralima pri izračunavanju površina i zapremina ograničenih kružnim linijama.

Primer 1. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \sin t, t = \arcsin \frac{x}{a} \\ dx = a \cos t \\ x^2 = a^2 \sin^2 t \end{array} \right] = \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot a \cdot \cos t dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sin t \cdot \cos t \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\arcsin \frac{x}{a} + \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right)^2} \right] + C =$$

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Primer 2. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = ?$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = I_1 + I_2$$

Drugi integral je tablični:

$$I_2 = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|,$$

a jedan od načina rešavanja prvog je sledeći:

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \left[dv = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, v = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] = uv - \int v du,$$

$$v = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left| \frac{x^2 + a^2 = t^2}{x dx = t dt} \right| = \int \frac{t dt}{t} = t = \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{pa je:}$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} + I,$$

sada je:

$$I = I_1 + I_2 = x\sqrt{x^2 + a^2} + I + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

7.9 INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

1) Ako imamo integral oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$ gde je R racionalna funkcija, uvešćemo takozvanu univerzalnu trigonometrijsku smenu i dobiti integral racionalne funkcije:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2t}{1+t^2}$$

2) Ako pod integralom imamo izraz $R(\sin x, \cos x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$, P, Q su polinomi, tako da

je jedan od tih polinoma neparan a drugi paran po $\sin x$, (odnosno $\cos x$) onda ćemo uvesti smenu

$\cos x = t$, odnosno $\sin x = t$ i dobiti integral racionalne funkcije.

3) Ako je podintegralna funkcija $\int R(\sin x, \cos x) dx$, racionalna po $\operatorname{tg} x$ onda uvodimo smenu

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Primer 1.

$$I = \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = ?$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$I = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{2+t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Primer 2.
$$I = \int \frac{dx}{9 + 5 \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C,$$

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$$

Primer 3.
$$I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Primer 4.
$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x - 1)} = \left| \begin{array}{l} tx = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + C$$

8. ODREĐENI INTEGRAL

Određeni integral u Rimanovom smislu se obeležava sa:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Ovo se čita: "integral od a do b ef od x de x ".

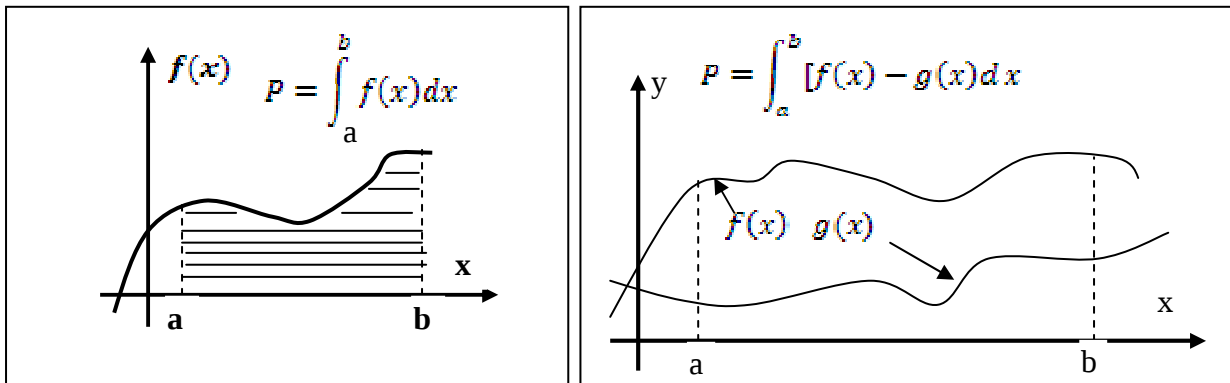
- a - je donja granica integrala
- b - je gornja granica integrala
- $f(x)$ - je podintegralna funkcija (integrand)
- x - je integraciona promenljiva
- $[a, b]$ - je interval integracije

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada ona ima primitivnu funkciju $\int f(x) dx = F(x) + C$ i važi jednakost:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ova jednakost se zove **Njtn-Lajbnicova formula** i daje vezu između određenog i neodređenog integrala. Može se reći da je ovo osnovna formula integralnog računa.

Vrednost određenog integrala na segmentu $[a, b]$ geometrijski **predstavlja površinu** koju grafik nenegativne funkcije $f(x)$ obrazuje sa x -osom, i pravama $x = a$ i $x = b$.



8.1 OSNOVNA SVOJSTVA ODREĐENOG INTEGRALA

1) Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija u intervalu $[a, b]$, onda je:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

2) Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije, onda je:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

3) Ako integrabilne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ zadovoljavaju u intervalu $[a, b]$, gde je $a < b$, uslov $f(x) \leq g(x)$, onda je:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

4) Ako granice integrala zamene mesta integral menja znak:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5) Ako je funkcija integrabilna na intervalu $[a, b]$ i ako je $a < c < b$ onda vredi:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Smena promenljive u određenom integralu se vrši na dva načina:

- 1) Integral se reši smenom kao neodređeni, zatim se vrati početna promenljiva gde se uvrštavaju zadate granice ili
- 2) Smenom promenljivih izračunavaju se nove granice i one se na kraju uvrštavaju.

Primeri određenih integrala

1. Reši integral: $\int_1^3 x^3 dx$

Ovaj integral je tablični i njegovo rešenje je $\frac{x^4}{4}$, pa tu stavimo jednu uspravnu crtu i napišemo brojeve iz granica integrala: $\frac{x^4}{4} \Big|_1^3$. Sada x menjamo sa 3 pa od toga oduzmemo kad x zamenimo sa 1,

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81-1}{4} = 20$$

2. Reši integral: $\int_0^2 \frac{dx}{x+2}$

Ovaj zadatak očigledno zahteva smenu. Rešićemo ga na dva načina:

a) Skinućemo granice i reši ga kao neodređeni:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \left| \frac{x+2=t}{dx=dt} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \text{vratimo smenu} = \ln|x+2|$$

Sada vratimo rešenje u određeni integral i granice se ne menjaju!

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^2 = \ln(2+2) - \ln(0+2) = \ln 4 - \ln 2 = \ln \frac{4}{2} = \ln 2$$

b) Radimo integral smenom ali menjamo i granice prema novoj promenljivoj:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \left| \begin{array}{l} x+2 = t, \text{ za } x=2 \rightarrow t=4 \\ dx = dt, \text{ za } x=0 \rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

3. Rešiti integral $\int_1^e x^3 \ln x dx = ?$

$$\begin{aligned} \int_1^e x^3 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} \ln x = u, \quad \frac{1}{x} dx = du \\ x^3 dx = dv, \quad \frac{x^4}{4} = v \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} dx = \\ &= \left(\ln e \cdot \frac{e^4}{4} - \ln 1 \cdot \frac{1^4}{4} \right) - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16} \end{aligned}$$

8.2 PRIMENA ODREĐENIH INTEGRALA U GEOMETRIJI

1. Površina figura u ravni:

- a) $P = \int_a^b f(x) dx$, ako je kriva $y = f(x)$ iznad x -ose
- b) $P = - \int_a^b f(x) dx$, ako je kriva ispod x -ose
- c) $P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$, ako nam treba površina između krivih

Ako je kriva zadata u polarnim koordinatama: $G = \{(\rho, \varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq f(\varphi)\}$ onda je površina:

$$P(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$

2. Zapremina tela:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \text{ ako se kriva } y = f(x) \text{ okreće oko } x\text{-ose}$$

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy, \text{ ako se kriva } x = f(y) \text{ okreće oko } y\text{-ose}$$

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt \text{ i } V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y(t) x'(t) dt, \text{ ako je kriva data parametarski: } x = x(t), y = y(t)$$

Ako je kriva zadata u polarnim koordinatama: $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \varphi d\varphi$$

3. Dužina luka krive: rektifikacija krive

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, ako radimo po x , a parametarski $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$,
 $L = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy$, ako radimo po y , a polarno $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$, $\rho = \rho(\varphi)$.

4. Površina rotacione površi:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \text{ po } x \quad x \in [a, b]$$

$$S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + g'(y)^2} dy, \text{ po } y \quad y \in [c, d]$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \text{ parametarski } x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\rho \sin \varphi| \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi, \text{ polarno } \varphi \in [\alpha, \beta]$$

Pri rešavanju ovih zadataka potrebno je skicirati odgovarajuće krive, naći njihove presečne tačke ako postoje i utvrditi granice integracije. Ovo će biti dato kroz svaki primer posebno.

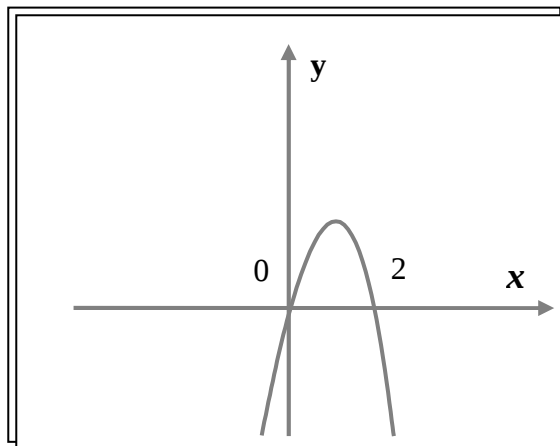
Primeri

1. Izračunati površinu figura ograničene lukom krive $y = -x^2 + 2x$ i pravom $y = 0$

Rešenje:

Data kriva je parabola, i ako je skiciramo vidimo da seče x- osu u $x = 0$ i u $x = 2$.

Treba naći površinu osenčenog dela, pa je jasno da granice integrala idu od 0 do 2, a pošto je deo površine koju tražimo iznad x ose, u integralu ne moramo uzimati apsolutnu vrednost.



Tražena površina je dakle $P = \frac{4}{3}$

2. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama: $y=2x^2+1$ i $y=x^2+10$

Rešenje:

Tačke preseka ove dve krive, koje ćemo dobiti rešavanjem sistema jednačina, će nam dati granice integrala,

$$\begin{array}{l} y = 2x^2 + 1 \\ y = x^2 + 10 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = x^2 + 10 \\ \Rightarrow x^2 = 9, \quad x = \pm 3 \end{array} \right.$$

Dakle integral "ide" od -3 do 3

Treba skicirati grafike funkcija kako bi sve bilo pregledno.

$$y = 2x^2 + 1$$

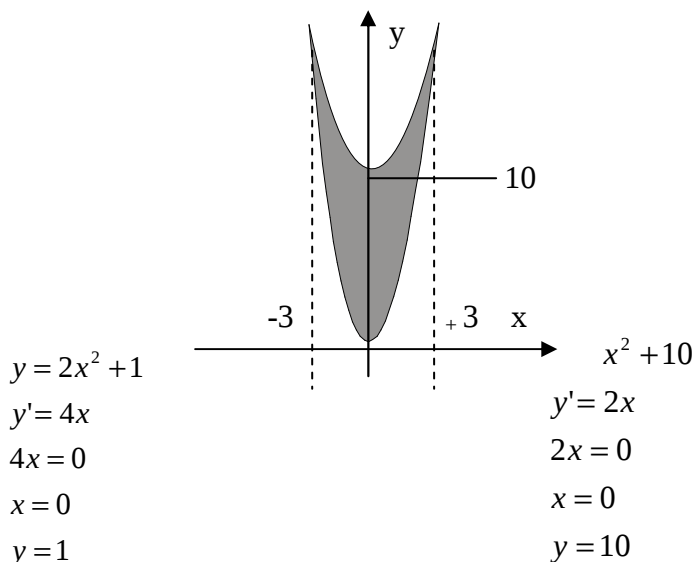
$$2x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = x^2 + 10$$

$$x^2 + 10 = 0$$

$$x^2 = -10$$



Parabola $y = 2x^2 + 1$ ima minimum u tački (0,1) a , y - osu seče u 1,

Parabola $y = x^2 + 10$ ima minimum u (0,10) i tu seče y- osu.

Tražena površina je osenčeni deo između parabola, i nju ćemo naći kad od površine ispod gornje krive oduzmemo površinu ispod donje krive, odnosno u integralu oduzmemo donju ($y = 2x^2 + 1$) od gornje parabole ($y = x^2 + 10$) .

Pošto je grafik simetričan u odnosu na y osu,odnosno parne su obe funkcije,lakše nam je da izračunamo površinu od 0 do 3 pa da to pomnožimo sa 2.

$$P = \int_{-3}^3 [(x^2 + 10) - (2x^2 + 1)] dx \text{ odnosno}$$

$$P = 2 \int_0^3 [(x^2 + 10) - (2x^2 + 1)] dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 2 \cdot 18 = 36$$

3. Odrediti površinu lika ograničenog lukom krive $y^2 + y + x = 6$ i y - osom

Rešenje :

U ovom zadatku nam je pogodnije da izrazimo x kao funkciju, a y kao nezavisno promenljivu

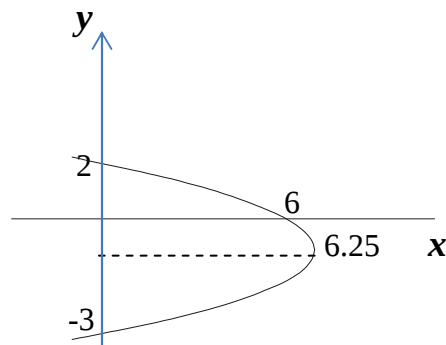
$$y^2 + y + x = 6 \Rightarrow \boxed{x = -y^2 - y + 6}$$

$$x = -y^2 - y + 6 \rightarrow -y^2 - y + 6 = 0 \text{ nađemo } y_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \text{ pa je } y_1 = -3, y_2 = 2$$

$$x' = -2y - 1 \quad x' = 0 \quad \text{za} \quad -2y - 1 = 0 \quad \text{pa je} \quad y = -\frac{1}{2} \quad \text{to jest} \quad x = 6\frac{1}{4}$$

Tačka $\left(6\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ je maksimum kad je y nezavisno ronenjiva.

Radimo integraciju po y , gde nam granice integrala očigledno idu od -3 do 2.

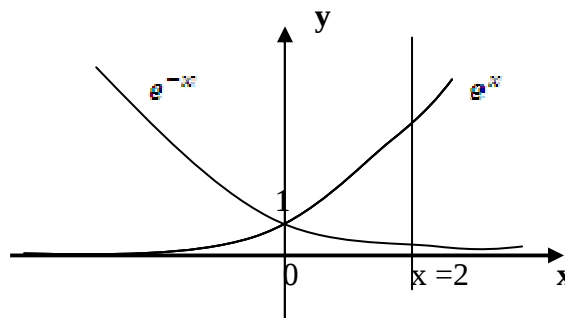


$$P = \int_{-3}^2 (-y^2 - y + 6) dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 6y \right) \Big|_{-3}^2 = \frac{125}{6}$$

4. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ i $x = 2$

Ovde se radi o graficima elementarnih funkcija

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = \\ &= (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = e^2 + e^{-2} - 2e^0 \\ P &= e^2 + e^{-2} - 2. \end{aligned}$$



5. Odreiti zapreminu tela koje nastaje rotacijom

6. oko ose Ox dela površi ograničenog lukom krive $y = 4x - x^2$ i osom Ox .

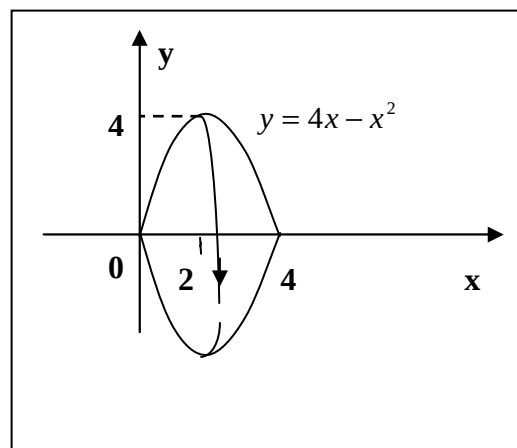
Rešenje:

Nacrtamo prvo parabolu $y = 4x - x^2$ i nađemo njen presek sa x - **osom**:

$$y = 4x - x^2$$

$$4x - x^2 = 0 \quad \text{pa je} \quad x(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$y' = 4 - 2x \quad \text{pa je} \quad 4 - 2x = 0 \quad \text{za} \quad x = 2 \quad \text{pa je} \quad y = 4$$



Granice integrala su 0 i 4

Zapremina tela nastalog rotacijom ravne figure oko x-ose je:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx$$

$$= \pi \left(16 \frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(16 \frac{64}{3} - 2 \cdot 256 + \frac{256}{5} \right) = \pi \frac{512}{15} = \frac{512\pi}{15}$$

Zapremina tela je $V = \frac{512\pi}{15}$

6. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom kruga $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ oko Ox ose ($b > r$)

Rešenje:

Jednačina kruga je data izrazom: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ gde su p i q koordinate centra, a r poluprečnik kružnice.

$x^2 + (y - b)^2 = r^2$ nam govori da je $p=0$ a $q=b$, pa će slika izgledati:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

odavde moramo izraziti y

$$(y - b)^2 = r^2 - x^2$$

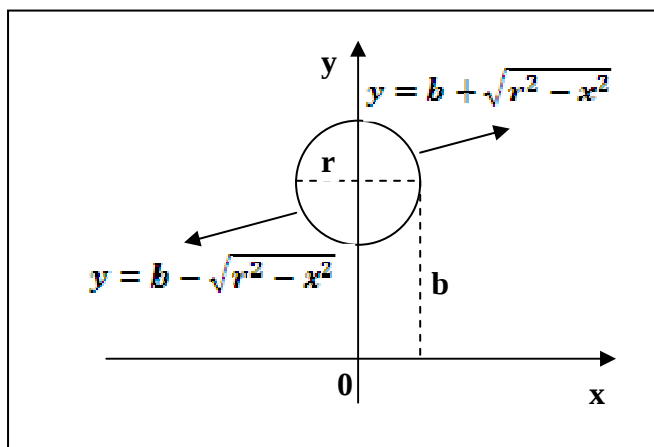
$$y - b = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ovde smo dobili dva dela kružnice

$$\text{gornji } y = b + \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{donji } y = b - \sqrt{r^2 - x^2}$$



Rotacija ovog kruga će nam dati telo poznatije kao TORUS ili unutrašnja guma bicikla

Zapreminu tela ćemo dobiti kada od zapremine tela koje nastaje rotacijom gornjeg dela kružnice (puna guma) oduzmemo zapreminu tela koja nastaje rotacijom donjeg dela kružnice

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

Nađimo prvo vrednost izraza $y_1^2 - y_2^2$

$$\begin{aligned} y^2 - y_2^2 &= (b + \sqrt{(r^2 - x^2)})^2 - (b - \sqrt{(r^2 - x^2)})^2 \\ &= (b^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} + r^2) - (b^2 - 2b\sqrt{r^2 - x^2} + r^2) \\ &= b^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - b^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 \\ &= 4b\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Jasno je da granice integrala idu od $-r$ do r

Rešimo prvo neodređeni integral.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{(r^2 - r^2 \sin^2 t)} r \cos t dt \\ &= \int \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 t)} r \cos t dt \\ &= \int r \sqrt{1 - \sin^2 t} r \cos t dt \\ \text{Pošto je } 1 - \sin^2 t &= \cos^2 t \\ &= \int r^2 \cos t \cos t dt \\ &= \int r^2 \cos^2 t dt \end{aligned}$$

r^2 je konstanta pa će ići ispred integrala, a upotrebićemo i formulu: $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, pa će $i \frac{1}{2}$ kao konstanta ispred integrala. Dakle:

$$\begin{aligned} &= \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) \end{aligned}$$

Smena je bila: $\left| \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \end{array} \right|$, za $x = -r$ je $-r = r \sin t$, tj. $\sin t = -1$ pa je $t = -\frac{\pi}{2}$

Za $x = r$ je $r = r \sin t$, tj. $\sin t = 1$ pa je $t = \frac{\pi}{2}$

Nove granice su dakle $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$

Vratimo se u integral:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi 4b \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi b r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(-2 \frac{\pi}{2}) \right) \right] \\ &= 2\pi b r^2 \pi \\ &= 2b r^2 \pi^2 \end{aligned}$$

Dakle, posle mnogo napora konačno rešenje je $V = 2b r^2 \pi^2$

7. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln x$ od tačke $x = \sqrt{3}$ do tačke $x = \sqrt{8}$

Ovde nam slika nije neophodna!

Formula za izračunavanje dužine luka krive je $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, ako radimo po x .

$y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \text{uzimamo}$$

smenu.

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 \\ x dx = t dt \\ dx = \frac{t dt}{x}, \frac{dx}{x} = \frac{t dt}{x^2} = \frac{t dt}{t^2 - 1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{granice su sada} \\ x = \sqrt{3} \rightarrow t = 2 \\ x = \sqrt{8} \rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} =$$

$$\int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \bigg|_2^3 =$$

$$= 3 + \ln \sqrt{\frac{3-1}{3+1}} - \left(2 + \ln \sqrt{\frac{2-1}{2+1}} \right) = 1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L = 1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

9. BROJNI REDOVI

9.1 OSNOVNI POJMOVI

Brojnim redovima ljudi su se bavili od nastanka matematike. Posebno su rano urađene i mnogo se koriste aritmetički i geometrijski red (dati su u prilogu).

▪ Definicija 1

Neka je $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ niz realnih ili kompleksnih brojeva,

tada se izraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ naziva **beskonačni brojni red**.

▪ Definicija 2

Izraz $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ je takođe **beskonačni brojni red**.

▪ Definicija 3

Neka je dat niz delimičnih parcijalnih suma reda,

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

M

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ako postoji granična vrednost

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

kažemo da red **konvergira** i da je S **suma reda**.

Red koji nije konvergentan je **divergentan**.

▪ Red $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ naziva se **ostatak reda**.

Primeri: Ispitati konvergenciju i odrediti sumu redova:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Rešenje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + L + \frac{1}{n(n+1)} + L$$

 n -ta parcijalna suma je:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + L + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + L + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Zaključujemo da je red konvergentan i da mu je suma $S = 1$.

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}.$$

Rešenje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + L + \ln \frac{n+1}{n} + L$$

 n -ta parcijalna suma je:

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + L + \ln((n+1) - \ln n) = \ln(n+1).$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$$

Red je divergentan.

$$3. \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + L + aq^n + L \text{ . (geometrijski red)}$$

Rešenje:

$$n\text{-ta parcijalna suma je } S_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$\text{Ako je } |q| < 1 \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} \text{ i red je konvergentan,}$$

$$\text{Ako je } |q| > 1 \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \text{ i red je divergentan,}$$

$$\text{Ako je } q = 1 \quad S_n = a(n+1), S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \text{ i red je divergentan.}$$

$$\text{Ako je } q = -1 \quad S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ a, & n = 2k+1 \end{cases} \text{ red nema graničnu vrednost i divergentan je.}$$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmoniski red).

Rešenje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + L + \frac{1}{n} + L$$

Red se može napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + L + \frac{1}{15} \right) + L &> 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + L = \\ = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^4} + L &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + L \end{aligned}$$

odakle se vidi da red divergira.

Napomena: Broj c je harmoniska sredina brojeva a i b , ako je $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

9.2 OSNOVNE OSOBINE BROJNIH REDOVA

▪ Teorema

Red i njegov ostatak su **ekvikonvergentni**, tj. Oba reda su ili konvergentni ili divergentni.

▪ Teorema

Ako je red konvergentan i ako je $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ njegov ostatak, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Dokaz:

Kako je

$$S_n + r_n = S \Leftrightarrow r_n = S - S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Znači da sumu svakog konvergentnog reda možemo po volji aproksimirati pomoću parcijalnih suma prvih n članova, čineći pri tom grešku r_n .

Jedna od glavnih primena teorije redova je približno izračunavanje veličina. U tim problemima osnovnu ulogu igra tačnost ocenjivanja, koje zasnivamo na oceni ostatka reda. $|r_n|$ je apsolutna greška aproksimacije $S \approx S_n$.

9.3 POTREBAN USLOV ZA KONVERGENCIJU REDA

▪ Teorema

Potreban uslov za konvergenciju reda je da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dokaz:

Kako je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, dobijamo $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Ako red konvergira onda je: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Na primeru harmoniskog reda možemo da uočimo da je izloženi uslov potreban, a ne i dovoljan za konvergenciju reda, tj.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, a dokazali smo da je red divergentan.

▪ Teorema

Ako se svaki član reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pomnoži sa konstantom C , ($C \neq 0$), dobija se red

$\sum_{k=1}^{\infty} C a_k$, koji je konvergentan ili divergentan zavisno od toga da li je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

konvergentan ili divergentan.

Dokaz:

Ako je dati red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Niz njegovih parcijalnih suma S_n ima graničnu vrednost S , tj $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Ako je S'_n parcijalna suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} C a_k$, tj

$$S'_n = C a_1 + C a_2 + \dots + C a_n = C (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = C S_n.$$

Njegova granična vrednost je $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C S_n = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C S$.

Znači novi red se isto ponaša kao polazni.

▪ Teorema

Ako su redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni i ako su im sume S' i S'' , tada će i red

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konvergirati i suma mu je $S' \pm S''$.

Dokaz:

Ako su S'_n i S''_n parcijalne sume redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$.

Neka je $S_n = S'_n \pm S''_n$ niz delimičnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$, tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n \pm S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' \pm S''.$$

Primer: Dokazati da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{2^{2k}}$ konvergentan.

Dokaz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Ovo su dva geometrijska reda čije su sume

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \text{ i } S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \text{ pa je suma reda } S = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

Posledice navedenih teorema

- Konvergentni redovi mogu se sabirati i oduzimati član po član.
- Zbir ili razlika konvergentnog i divergentnog reda je divergentan red.
- Zbir ili razlika divergentnih redova je divergentan red.

Brojni redovi se dele na :

- Redovi sa pozitivnim članovima,
- Alternativni (naizmenični) redovi,

9.4 REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Red čiji su svi članovi pozitivni naziva se **pozitivan red**. Parcijalne sume pozitivnog reda su monotono rastuće i prema tome granična vrednost ovih suma uvek postoji (konačna ili beskonačna).

9.5 KRITERIJUMI ZA ISPITIVANJE KONVERGENCIJE POZITIVNIH REDOVA

Kriterijumi o kojima će biti reči u narednom poglavlju samo odgovaraju na pitanje da li red konvergira ili ne, bez određivanja sume reda.

9.5.1 KRITERIJUM UPOREĐIVANJA ČLANOVA REDOVA

- Ako su članovi reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, počev od nekog člana, uvek manji od odgovarajućih članova reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ za koji znamo da konvergira, tada i zadati red konvergira.
- Ako su članovi reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, počev od nekog člana, uvek veći od odgovarajućih članova reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ za koji znamo da divergira, tada i zadati red divergira.

Dokaz:

U prvom slučaju, ako su S'_n i S''_n parcijalne sume datih redova, a red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$, $S'' > 0$, a kako su svi članovi reda pozitivni $S'_n < S''_n$.

Iz relacije $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n, \dots$ dobijamo da je $S'_n < S''_n$, odnosno $S'_n < S''$, što znači da se vrednosti niza S'_n moraju nagomilavati oko nekog broja S' koji je manji ili jednak S'' . Dakle počev od nekog dovoljno velikog broja svi članovi niza S'_n nagomilavaće se oko neke vrednosti S' , tj $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$, odnosno red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Dokaz u drugom slučaju je istovetan.

Primeri:

Ispitati konvergenciju redova:

$$5. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Rešenje:

Da bismo dokazali konvergenciju ovog reda upoređićemo ga sa redom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ za koji znamo da konvergira.

Opšti član poznatog konvergentnog reda je $b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n}$.

Opšti član zadatog reda $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2 + n} = b_n$ je dakle uvek manji od opšteg člana reda koji konvergira, dakle i zadati red konvergira.

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Rešenje:

Uporedimo zadati red sa harmonijskim redom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Kako je $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} = b_n$ i znajući da harmonijski red divergira, zaključujemo da i zadati red divergira.

7.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}.$$

Rešenje:

Kako je $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, a red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ je konvergentan (geometrijski red), te i zadati red konvergira.

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

Rešenje:

Kako je $a_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, a red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentan, biće i zadati red divergentan.

9.5.2 DALAMBEROV KRITERIJUM (D'ALAMBER)

Teorema

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je red sa pozitivnim članovima i neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Tada za:

- $l < 1$ - red konvergira,
- $l > 1$ - red divergira,
- $l = 1$ - ne znamo da li red konvergira ili divergira (prelazimo na drugi kriterijum za ispitivanje konvergencije).

Ovaj kriterijum samo odgovara na pitanje da li red konvergira ili ne, ali ne izračunava sumu reda.

Primeri: Ispitati konvergenciju redova:

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{k!}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0$$

Kako je $l = 0 < 1$, red konvergira.

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

$l = \frac{1}{2} < 1$, red konvergira.

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$$

$l = \infty > 1$, red divergira.

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$l = 1$, ne znamo da li red divergira ili konvergira. Ovo je harmonijski red za koji smo dokazali da divergira.

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+2)5^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(2n+4)5^{n+1}}}{\frac{n}{(2n+2)5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)5^n}{(2n+4)5^n n} = \frac{1}{5}$$

$$l = \frac{1}{5} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$l = e > 1, \text{ red divergira.}$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^{k+2}}{3^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1) \cdot 2^{n+3}}{3^{n+1}}}{\frac{n \cdot 2^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$l = \frac{2}{3} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1}} \left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4n+5}} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{4n+1}} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{4n+5}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$l = \frac{2}{5} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{3^k k!}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{3^{n+1} (n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{3^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3}$$

$$l = \frac{2}{3} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{(2n-1)}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}$$

$$l = \frac{3}{e} > 0, \text{ red divergira.}$$

9.5.3 KOŠIJEV KRITERIJUM (CAUCHY)

Teorema

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ red sa pozitivnim članovima i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Tada za:

- $l < 1$ - red konvergira,
- $l > 1$ - red divergira,
- $l = 1$ - ne znamo da li red konvergira ili divergira
(prelazimo na drugi kriterijum za ispitivanje konvergencije)

Primeri: Ispitati konvergenciju redova:

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$l = 0 < 1$, red konvergira.

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k^2}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e},$$

$l = \frac{1}{e} < 1$, red konvergira.

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k^2}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e}$$

$$l = \frac{1}{e} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2 + 2}{k^2 + k + 3} \right)^{k^2}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + n + 3} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{n^2 + n + 3} \right)^{\frac{n+1}{n^2 + n + 3} \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n+1} \cdot n} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + n + 3}} = e^{-1}$$

$$l = \frac{1}{e} < 1, \text{ red konvergira,}$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} k \left(2 + \frac{1}{k} \right)^{-k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^{-1} = 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$l = \frac{1}{2} < 1, \text{ red konvergira, zato što je}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

$$25. \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+2} \right)^{(k-1)k}.$$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{(n-1)n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+2} \right)^{\frac{3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot (n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{n+2}} = e^{-3}$$

$$l = \frac{1}{e^3} < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}.$$

Rešenje:

$$l = \frac{1}{e^2} < 1, \text{ red konvergira.}$$

9.5.4 KOŠIJEV INTEGRALNI KRITERIJUM

Teorema

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ red sa pozitivnim i nerastućim članovima. tj. $a_k > 0$ I $a_1 \geq a_2 \geq \dots$

Ako je funkcija $f(x)$ na intervalu $[1, \infty)$ pozitivna, neprekidna i nerastuća takva da je $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$, onda

- ako $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergira, onda i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira,
- ako $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergira, onda i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Kada pustimo da $n \rightarrow \infty$, ako nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergira tada

integral $\int_1^{n+1} f(x) dx$ teži konačnoj vrednosti I , tj. $I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx < I$, pa dobijamo

$S_{n+1} < I_n + a_1 < S_n + a_1$, tj rastući niz parcijalnih suma S_{n+1} je ograničen odozgo. Znači postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S$, tj red konvergira.

Ako integral divergira, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = \infty$, pa iz veze $I_n < S_n$ sledi da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \infty$, tj red divergira.

Primeri: Ispitati konvergenciju redova:

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

Rešenje:

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in [1, \infty)$.

Kako je $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0, 1 - \ln x = 0, x = e$,

za $x \in (0, e) \Rightarrow f(x) \uparrow$, a za $x \in (e, \infty) \Rightarrow f(x) \downarrow$.

Kako je $e = 2,718K$ funkciju ćemo posmatrati u intervalu $x \in [3, \infty)$, na kome je ona pozitivna i nerastuća.

$$I = \int_3^{\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a \frac{\ln x dx}{x} = \{ \ln x = t \} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^{\ln a} t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} t^2 \Big|_{\ln 3}^{\ln a} = \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln^2 a - \ln^2 3) = \infty.$$

Kako integral divergira po Košijevoj teotemi divergiraj i red.

$$28. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

Rešenje:

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $x \geq 2$.

Funkcija $f(x) \geq 0$ i neprekidna za $x \geq 2$.

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}, \quad f'(x) = 0, \ln x + 2 = 0, x = e^{-2}.$$

Za $x \in (0, e^{-2}) \Rightarrow f(x) \downarrow$, a za $x \in (e^{-2}, \infty) \Rightarrow f(x) \uparrow$.

Dakle za $x \in [2, \infty)$ funkcija je pozitivna i nerastuća.

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln^2 x} = \{\ln x = t\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{dt}{t^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln a} = -\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \text{ i}$$

nesvosstveni integral konvergira, što povlači da i red konvergira.

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}.$$

Rešenje:

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x \in [1, \infty)$.

Funkcija je očigledno pozitivna i neprekidna za $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{xe^{\sqrt{x}}} = -\frac{(\sqrt{x}+1)}{2x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} < 0, x \in [1, \infty) \text{ znači funkcija opada}$$

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \{\sqrt{x} = t\} = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{a}} e^{-t} dt = -2 \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-t} \Big|_1^{\sqrt{a}} = -2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{a}}} - \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e},$$

integral konvergira, pa konvergira i red.

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} k^a.$$

Rešenje:

a) Ako je $a > 0$ red divergira jer opšti član reda ne teži nuli.

b) Ako je $a < 0$, $a = -b$, $b > 0$ pa imamo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^b} = \begin{cases} \frac{x^{1-b}}{1-b}, & b \neq 1 \\ \ln x, & b = 1 \end{cases}$$

Ako je $b \leq 1$ integral divergira, pa i red divergira,

ako je $b > 1$ integral konvergira, pa i red konvergira

Na primer redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ divergiraju, dok redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiraju.

9.6 ALTERNATIVNI REDOVI

- Red $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, $a_k > 0$, naziva se **alternativni ili naizmenični red**.
- Suma reda S , ako postoji, zadovoljava nejednakost $0 \leq S \leq a_1$.

9.6.1 LAJBNICOVA TEOREMA

Alternativni red konvergira ako

1. **apsolutne vrednosti članova alternativnog reda opadaju (ne rastu) tj**
 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, i
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Primeri: Ispitati konvergenciju redova:

$$\text{i. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Rešenje:

Ovo je alternativni red, gde je opšti član ima oblik $(-1)^{n-1} a_n$, gde je $a_n = \frac{1}{n}$ pozitivan i monotonno opadajući nula niz. Po Lajbnicovom kriterijumu, red konvergira.

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1}.$$

Rešenje:

Ovo je alternativni red.

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$.
- ii. Dokažimo još da niz a_n opada.

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
y'	-	+	-
y	]]	Z	]]

Iz tablice vidimo da funkcija opada za $x \geq 1$, što znači da i niz sa opštim članom a_n opada za $n \geq 1$, pa red konvergira po Lajbnicovom kriterijumu.

$$32. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k-1}{k(k+1)}.$$

Rešenje:

Ovo je alternativni red.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n(n+1)} = 0$$

2. Dokažimo još da niz a_n opada.

Uočimo funkciju $f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}, x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x)^2}, f'(x) = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

x	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$
y'	-	+	-
y	]]	Z	]]

Iz tablice vidimo da za $x \geq 2$ funkcija opada, odnosno niz a_n opada za $n \geq 2$.

Dakle red konvergira po Lajbnicovom kriterijumu.

10. FUNKCIJE DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE

10.1 POJAM FUNKCIJA DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE

Definicija

Neka su dati neprazni skupovi A i B , $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. Funkcija $f: A \rightarrow B$, za svako $(x, y) \in A$ zove se funkcija od dve nezavisno promenljive ili preslikavanje iz skupa A u skup B .

Promenljiva z koja zavisi od promenljivih x i y u oznaci $z = f(x, y)$, je realana funkcija dve realne nezavisno promenljive.

Skup $A = D(f) \subset \mathbb{R}^2$, za koje funkcija ima smisla, tj. za koje se može izračunati $f(x, y) = z$ zove se **oblast definisanosti** ili **domen funkcije**, a skup B **kodomen** ili skup vrednosti te funkcije.

Grafik funkcije $z = f(x, y)$ predstavlja skup tačaka $M(x, y, f(x, y))$ koje obrazuju površ u prostoru kao na slici.

Primer 1.

Odrediti oblast definisanosti funkcije

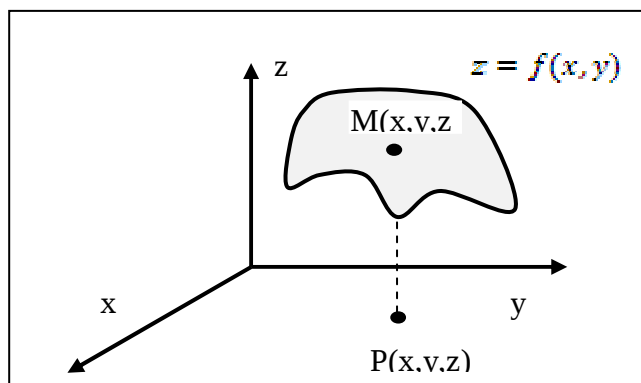
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Rešenje:

Potkorena vrednost mora da je veća ili jednaka nuli,

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



Zaključak je da oblast definisanosti date funkcije čine sve tačke koje leže u unutrašnjosti ili na periferiji kruga $x^2 + y^2 = 1$.

10.2 GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE DVE PROMELJIVE

Definicija

Funkcija $z = f(x, y)$ teži konačnoj graničnoj vrednosti B kad x teži a i y teži b , ako za proizvoljno unapred zadato $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta(\varepsilon) > 0$, takav da je ispunjeno sledeće

$$|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - B| < \varepsilon$$

Ovo zapisujemo kao $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = B$.

Definicija

Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $A(a, b)$, ako je

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$$

10.3 PARCIJALNI IZVODI I TOTALNI DIFERENCIJAL FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Definicija

Parcijalnim izvodom prvog reda funkcije $f(x, y)$ po argumentu x u tački $A(a, b)$ naziva se izvod u tački $x = a$ od funkcije $f(x, b)$ i označava se sa

$$f'_x(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

Parcijalnim izvodom prvog reda funkcije $f(x, y)$ po argumentu y u tački $A(a, b)$ naziva se izvod u tački $y = b$ od funkcije $f(a, y)$ i označava se sa

$$f'_y(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

Parcijalni izvod u tački je broj.

Primer 2.

Naći parcijalne izvode po x i po y funkcije $z = x^3 y^2 + 2x - 3y + 6$

- a) U proizvoljnoj tački $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- b) U tački $A(1, 2)$

Rešenje:

$$a) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 2$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 2x^3y - 3$$

$$b) \frac{\partial(A)}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2 = 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 2 = 14$$

$$\frac{\partial(A)}{\partial y} = 2x^3y - 3 = 2 \cdot 1^3 \cdot 2 - 3 = 1$$

Definicija (totalni diferencijal)

Neka funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M(x, y)$ ima parcijalne izvode i neka su oni neprekidni, tada se izraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

naziva totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$

Primer 3.

Naći totalni diferencijal funkcije $z = x^3y^2 + 2x - 3y + 6$

a) U proizvoljnoj tački $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

b) U tački $A(1, 2)$

Rešenje:

$$a) \quad dz(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy = (3x^2y^2 + 2)dx + (2yx^3 - 3)dy$$

$$b) \quad dz(A) = \left(\frac{\partial z(A)}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z(A)}{\partial y} \right) dy = (3x^2y^2 + 2) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} dx + (2yx^3 - 3) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} dy$$

$$dz(A) = 14dx + dy$$

10.4 PARCIJALNI IZVOD DRUGOG REDA

Parcijalnim izvodima drugog reda funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo parcijalne izvode njenih parcijalnih izvoda prvog reda.

Od parcijalnih izvoda prvog reda mogu se formirati sledeća četiri parcijalna izvoda drugog reda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$$

Parcijalni izvodi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) \text{ i } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

nazivaju se mešovitim parcijalnim izvodima drugog reda funkcije $z = f(x, y)$. Od parcijalnih izvoda drugog reda mogu se formirati parcijalni izvodi trećeg reda, itd.

NAPOMENA: Ako je funkcija $z = f(x, y)$ dva puta diferencijabilna u tački $M(x_0, y_0)$

Tada je u toj tački $f''_{xy}((x_0, y_0)) = f''_{yx}((x_0, y_0))$.

Primer 4.

Naći druge parcijalne izvode (parcijalne izvode drugog reda) funkcije

$$z = x^3 y^2 + 2x - 3y + 6$$

- a) U proizvoljnoj tački $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- b) U tački $A(1, 2)$

Rešenje:

a.) Kako je,

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = (3x^2 y^2 + 2) \qquad \text{to je} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 6xy^2, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right) = 6x^2 y \end{array} \right\}.$$

Analogno je

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = (2yx^3 - 3) \qquad \text{pa je} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 2x^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) = 6yx^2 \end{array} \right\}.$$

b.) Kako je,

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = (3x^2 y^2 + 2) \quad \text{to je}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z(A)}{\partial x^2} = (6xy^2) \underset{\substack{x=1 \\ x=2}}{=} 6 \cdot 1 \cdot 2^2 = 24, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z(A)}{\partial x} \right) = (6x^2 y) \underset{\substack{x=1 \\ x=2}}{=} 6 \cdot 1^2 \cdot 2 = 12 \end{array} \right\}.$$

Analogno je

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = (2xy^3 - 3) \quad \text{pa je}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z(A)}{\partial y^2} = (2x^3) \underset{\substack{x=1 \\ x=2}}{=} 2 \cdot 1^3 = 2, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z(A)}{\partial y} \right) = (6yx^2) \underset{\substack{x=1 \\ x=2}}{=} 6 \cdot 2 \cdot 1^2 = 12 \end{array} \right\}.$$

Primetimo da je i pod a) i pod b) $f_{xy}'' = f_{yx}''$

10.5 DIFERENCIJAL DRUGOG REDA

Diferencijalom drugog reda funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo diferencijal diferencijala prvog reda te funkcije, odnosno $d^2 z = d(dz)$.

Analogno se određuju diferencijali funkcije z višeg reda, odnosno diferencijal n -tog reda je diferencijal $(n-1)$ -og reda funkcije $z(x, y)$, odnosno $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda tada je njen diferencijal drugog reda definisan formulom:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$$

Primer 5.

Naći diferencijal drugog reda funkcije $z = x^3 y^2 + 2x - 3y + 6$

a) U proizvoljnoj tački $M(x, y) \in R^2$

b) U tački $A(1, 2)$

Rešenje:

Kako smo u primeru 4. odredili sve parcijalne izvode drugog reda imamo da je:

$$\text{a) } d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = 6xy^2 (dx)^2 + 2 \cdot 6x^2 y dx dy + 2x^3 (dy)^2$$

$$\text{b) } d^2 z(A) = \frac{\partial^2 z(A)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z(A)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z(A)}{\partial y^2} (dy)^2 = 24(dx)^2 + 2 \cdot 12 dx dy + 2(dy)^2$$

10.6 EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE DVE NEZAVISNE PROMENLJIVE

Definicija (minimum, maksimum)

Funkcija $f(x, y)$ ima **lokalni maksimum** u tački $A(a, b)$ ako za sve tačke (x, y) dovoljno bliske tački $A(a, b)$ važi:

$$f(a, b) > f(x, y).$$

Funkcija $f(x, y)$ ima **lokalni minimum** u tački $A(a, b)$ ako je za sve tačke (x, y) dovoljno bliske tački $A(a, b)$ važi $f(a, b) < f(x, y)$.

Teorema (potrebni uslovi za ekstremum)

Ako funkcija $z = f(x, y)$ dostiže ekstremum u tački $A(a, b)$, tada su prvi parcijalni izvodi u tački $A(a, b)$ jednaki nuli ili ne postoje.

Tačke u kojima su prvi parcijalni izvodi jednaki nuli ili ne postoje su **stacionarne** tačke te funkcije.

Teorema (dovoljni uslovi za ekstremum)

Neka je tačka $M(a, b)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$. Tada :

- a) ako je $d^2 f(x, y) = f(a, b) < 0$ onda je $f(a, b)$ *maksimum* funkcije $f(x, y)$
- b) ako je $d^2 f(x, y) = f(a, b) > 0$ onda je $f(a, b)$ *minimum* funkcije $f(x, y)$
- c) ako je $d^2 f(x, y) = f(a, b)$ menja znak pri prolasku kroz (a, b) , onda $f(a, b)$ *nije ekstrem* funkcije $f(x, y)$

Ovi uslovi ekvivalentni su sledećem :

Neka je:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(a, b) = A ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(a, b) = C ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(a, b) = B .$$

Formirajmo izraz (determinanta Δ) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} , \quad \Delta = AC - B^2$$

Tada :

- a) ako je $\Delta > 0$ onda funkcija ima **ekstremum** u tački $M(a, b)$ i to :
maksimum ako je $A < 0$ (ili $C < 0$)
minimum ako je $A > 0$ (ili $C > 0$)
- b) ako je $\Delta < 0$ onda funkcija **nema ekstremuma** u tački $M(a, b)$
- c) ako je $\Delta = 0$ onda pitanje postojanja ekstremuma u tački $M(a, b)$ ostaje otvoreno (potrebna su dalja ispitivanja)

Dakle, da bi odredili ekstremum finkcije $z = f(x, y)$ potrebno je prvo odrediti njene stacionarne tačke nalaženjem sistema jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ,$$

a zatim za svaku od tih stacionarnih tačaka, primenjujući teoremu o dovoljnim uslovima za postojanje ekstremuma, analizirati izraz :

$$\Delta = AC - B^2$$

Primer 6:

Naći ekstreme funkcije $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Rešenje:

Nađimo stacionarne tačke date funkcije iz uslova $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Dobijamo sistem jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy - 2 = 0$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa 2 i oduzmemo je od prve jednačine dobijamo da je

$$(x - y)^2 = 1 \Rightarrow x - y = 1 \vee x - y = -1 \Rightarrow x = y + 1 \vee x = y - 1.$$

Sada za $x = y + 1$ imamo iz druge jednačine $xy = 2 \Rightarrow (y + 1)y = 2 \Rightarrow y = -2 \vee y = 1$

pa vraćajući u $x = y + 1$ dobijamo da su stacionarne tačke $M_1(-1, -2)$ i $M_2(2, 1)$.

Analogno za $x = y - 1$ dobijamo još dve stacionarne tačke $M_3(-2, -1)$ i $M_4(1, 2)$.

Nadimo sada druge parcijalne izvode :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = C$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = B$$

Za svaku od stacionarnih tačaka izračunajmo izraz

$$\Delta = AC - B = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$$

a) za $M_1(-1, -2)$ $\Delta = 36(1 - 4) < 0$ pa u njoj funkcija nema ekstremuma

b) za $M_2(2, 1)$ $\Delta = 36(4 - 1) > 0$ i $A = 12 > 0$ pa u njoj funkcija ima lokalni minimum.

Taj minimum jednak je vrednosti funkcije za $x=2$ i $y=1$ i iznosi

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$$

c) za $M_3(-2, -1)$ $\Delta = 36(4 - 1) > 0$ i $A = -12 < 0$ pa u njoj funkcija ima lokalni maksimum. Taj maksimum jednak je vrednosti funkcije za $x=-2$ i $y=-1$ i iznosi

$$z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$$

d) za $M_4(1, 2)$ $\Delta = 36(1 - 4) < 0$ pa u njoj funkcija nema ekstremuma.

Primer 7.

Odrediti ekstremume funkcije $z = x^3 + 2y^2 - 3xy + 3x - 5y$

Rešenje:

Prvi korak je da se nađe prvi izvod po x i po y izjednače sa nulom i tako odrede stacionarne tačke, a zatim se odrede vrednosti (drugih parcijalnih izvoda A , B , C) parametra D u tim tačkama

$$\left. \begin{aligned} f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y + 3 = 0 \\ f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} &= 4y - 3x - 5 = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \quad \uparrow \left| \Rightarrow 3x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{15}{4} + 3 = 0 \quad | \cdot 4 \Rightarrow \right|$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 9x - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{17}{16}$$

Dakle stacionarne tačke su $P_1(1, 2)$ i $P_2()$

$$\left\{ \begin{aligned} f''_{xx} &= 6x \\ f''_{xy} &= -3 \\ f''_{yy} &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ za } P_1(1, 2) \Rightarrow \begin{aligned} A &= 6 \\ B &= -3 \\ C &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} D &= AC - B^2 \\ D &= 15 > 0 \\ A &= 6 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{funkcija ima } \mathbf{minimum}$$

$$z_{\min} = f_{\min}(x, y) = -4.$$

U tački P_2 je $D = AC - B^2 = -17 < 0$ pa funkcija nema ekstrem.

Primer 8:

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije : $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$

Rešenje:

Potrebni uslovi:

$$\left. \begin{aligned} f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} &= 4 - 2x = 0 \\ f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} &= -4 - 2y = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= 2 \\ y_0 &= -2 \end{aligned}$$

Vrednosti drugih parcijalnih izvoda su :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f(2, -2)}{\partial x^2} = -2 \\ B &= \frac{\partial^2 f(2, -2)}{\partial x \partial y} = 0 \\ C &= \frac{\partial^2 f(2, -2)}{\partial y^2} = -2 \end{aligned} \right| D = AC - B^2 = (-2) * (-2) - 0 = 4 > 0, A = -2 < 0 \Rightarrow$$

Funkcija ima maksimum $z_{\max} = f(2, -2) = 8$

Definicija (uslovni ekstremum)

Uslovnim ekstremumom funkcije $z = f(x, y)$ naziva se ekstremum te funkcije uz uslov postojanja zavisnosti između promenljivih x i y , koji je dat jednačinom $\varphi(x, y) = 0$.

Da bi našli uslovni ekstremum potrebno je da formiramo takozvanu funkciju Lagranža:

Potrebni uslovi za postojanje uslovnog ekstremuma se svode na sistem od tri jednačine gde su nepoznate x, y, λ , dat sa :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Iz ovog sistema jednačina određuju se vrednosti x, y, λ , gde odgovarajuće tačke (x, y) predstavljaju potencijalne kandidate za tačke uslovnog ekstremuma.

Pitanje o postojanju i karakteru uslovnog ekstremuma u tim tačkama rešava se izračunavanjem znaka drugog diferencijala Lagranžove funkcije u tim tačkama, gde je drugi diferencijal dat sa :

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

Pri čemu su diferencijali dx i dy vezani relacijama :

$$d\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \text{ i } dx^2 + dy^2 > 0$$

Ukoliko je :

- $d^2F(x, y) < 0$ onda $f(x, y)$ ima **uslovni ekstremum** u tim tačkama
- $d^2F(x, y) > 0$ onda $f(x, y)$ ima **uslovni minimum** u tim tačkama
- $d^2F(x, y)$ menja znak pri prolasku kroz te tačke onda one nisu tačke uslovnog ekstremuma

11. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

11.1 POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Definicija: *Diferencijalnom jednačinom* nazivase relacija koja povezuje nezavisno promenljiv x , nepoznatu funkciju $y = f(x)$ i njene izvode $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ili diferencijale ($dy, d^2y, K, d^{(n)}y$):

$$F(x, y, y', y'', K, y^{(n)}) = 0.$$

Redom diferencijalne jednačine naziva se red najvišeg izvoda (ili diferencijala) koji se pojavljuje u datoj jednačini.

Definicija: Rešenjem diferencijalne jednačinenaziva se n puta diferencijabilna funkcija $y = y(x)$ koja identički zadovoljava datu jednačinu za svako x iz nekog segmenta $[a, b]$.

Rešiti jednačinu znači odrediti takvu vezu između promenljivih x i y , koja zadovoljava datu jednačinu.

Kako se se jednačine obično rešavaju integracijom, rešenje se često naziva integralom diferencijalne jednačine.

Primer 1:

$y' = \cos x$ diferencijalna jednačina prvog reda

$y'' + 3y' + 5y = \cos x$ diferencijalna jednačina drugog reda

Primer 2:

$$y' = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dy = \cos x dx \Leftrightarrow \int dy = \int \cos x dx \Leftrightarrow y = \sin x + C$$

Definicija: *Opšte rešenje* (opšti integral) diferencijalne jednačine n -tog reda je svaka funkcija oblika

$$y = \phi(x, C_1, C_2, K, C_n),$$

odnosno

$$\phi(x, y, C_1, C_2, K, C_n) = 0,$$

gde su C_1, C_2, K, C_n međusobno nezavisne konstante.

Definicija: *Partikularno rešenje* (patikularni integral) diferencijalne jednačine je svaka ona funkcija $y = y(x)$ koja se dobija iz opšteg rešenja te jednačine za odgovarajuće posebne vrednosti integracionih konstanti. Konstante se dobijaju iz takozvanih početnih uslova koje zadovoljava data funkcija i/ili njeni izvodi.

U ovom poglavlju su obrađene sledeće diferencijalne jednacine:

a) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA:**

- *Diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim,*
- *Homogena diferencijalna jednačina,*
- *Linearna diferencijalna jednačina,*
- *Bernulijeva diferencijalna jednačina.*

b) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA:**

Linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima homogenog tipa,

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

11.2 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Definicija: Diferencijalnom jednačinom prvog reda nazivamo jednačinu oblika

$$F(x, y, y') = 0 \quad y' = f(x, y),$$

odnosno ako se ona može rešiti po y' dobijamo tzv. normalni oblik diferencijalne jednačine:

$$y' = f(x, y).$$

u kojoj su x nezavisno promenljiva, y funkcija, a y' njen izvod.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda je

$$y = y(x, C).$$

Partikularno rešenje ove diferencijalne jednačine je ono za koje je određena konstanta $C = C_0$ iz početnih uslova:

$$y = y(x, C_0).$$

Primer: Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \cos x,$$

ako je za $x = 0$, $y = y(0) = 5$.

Opšte rešenje ove jednačine je $y = \sin x + C$.

Uvrstimo li početne uslove dobije se:

$$\sin(0) + C = 5 \Rightarrow C = 5,$$

pa je partikularno rešenje:

$$y = \sin x + 5.$$

11.2.1 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA RAZDVOJENIM PROMENLJIVIM

Ako se diferencijalna jednačina prvog reda može napisati u obliku

$$g(y)dy = f(x)dx$$

kažemo da se u toj jednačini mogu promenljive razdvojiti.

Integracijom obe strane jednačine dobijamo da je:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Ova relacija daje vezu između x , y i C , pa po definiciji predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine. Treba odrediti promenljivu y kao funkciju od x .

Opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda kod koje se mogu razdvojiti promenljive je:

$$A_1(x)B_1(y)dx + A_2(x)B_2(y)dy = 0,$$

gde su: $A_1(x), A_2(x), B_1(y), B_2(y)$, date funkcije, gde se uz uslov $A_2(x) \neq 0, B_1(y) \neq 0$, dobije

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx = -\frac{B_1(y)}{B_2(y)}dy, \text{ odnosno}$$

$$\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx = -\int \frac{B_1(y)}{B_2(y)}dy + C$$

Ako se zada početni uslov $y(x_0) = y_0$, određuje se konstanta C i njoj odgovarajuće partikularno rešenje koje zadovoljava dati početni uslov.

ZADACI

Rešiti diferencijalne jednačine:

1. $x dx + y dy = 0$.

Rešenje:

$$x dx + y dy = 0 \Leftrightarrow x dx = -y dy$$

Integracijom $\int x dx = \int -y dy$ dobijamo: $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C_1$, ali kako je $x^2 + y^2 \geq 0$, pa mora biti $2C_1 \geq 0$, pa možemo staviti $2C_1 = C^2$.

Znači opšte rešenje date diferencijalne jednačine glasi $x^2 + y^2 = C^2$.

To je familija koncentričnih krugova sa centrom u koordinatnom početku.

2. $y' = \frac{y}{x}, x \neq 0$.

Rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, y \neq 0.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = \ln|x| + C_1$, uvedemo smenu $C_1 = \ln C_2, C_2 > 0$, dobijamo $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$ odakle je $|y| = C_2|x|$.

Stavimo $C = \pm C_2$, pa dobijamo opšte rešenje $y = Cx$.

Ove integralne krive predstavljaju familiju pravih koje prolaze kroz koordinatni početak.

3. $y' = 2y^2 x^{-3}$, ako je $x \neq 0$

Rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 x^{-3} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x^3}$$

$$\int y^{-2} dy = 2 \int x^{-3} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2} + C \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1 - Cx^2}$$

4. Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$ za koje je $y(0)=1$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}(1+x^2)\frac{dy}{dx} &= y(x-\sqrt{1+x^2}) \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{y} &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x dx}{1+x^2} - \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x dx}{1+x^2} - \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \ln|y| &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln C_1 \\ |y| &= \frac{C_1 \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}, y = \frac{C \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}, C = \pm C_1.\end{aligned}$$

Odredimo partikularno rešenje: $1 = \frac{C \cdot 1}{1} \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow y_p = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

5. $xy' = y(1+x \cos x)$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}xy' &= y(1+x \cos x) \Leftrightarrow y' = \frac{y(1+x \cos x)}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{1+x \cdot \cos x}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \cos x\right) \cdot dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} + \int \cos x dx \Leftrightarrow \\ \ln|y| &= \ln|x| + \sin x + \ln C_1 \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| - \ln C_1 = \sin x, \\ \ln \left| \frac{y}{C_1 x} \right| &= \sin x \Leftrightarrow \frac{y}{C_1 x} = e^{\sin x} \Leftrightarrow y = C x e^{\sin x}, C = \pm C_1.\end{aligned}$$

6. $y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$ ako je $x, y \neq 0$

Rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy} \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow \int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln C$$

$$\ln(1+y^2)(1+x^2) = 2(\ln|x| + \ln C_1) \Leftrightarrow \ln(1+y^2)(1+x^2) = \ln(x^2 C) \Leftrightarrow$$

$$(1+y^2)(1+x^2) = x^2 C, \quad C_1^2 = C$$

$$7. \quad y' = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y$$

Rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y \Leftrightarrow \frac{dy}{\operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg}^2 x dx \Leftrightarrow \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} dy = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \sin^2 y}{\sin^2 y} dy = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 y} - 1 \right) dy = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \Leftrightarrow$$

$$y + \operatorname{ctgy} = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$8. \quad y' = 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0$$

Rešenje:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx$$

$$\sqrt{y} = x + C \Leftrightarrow y = (x + C)^2$$

Funkcija $y = 0$ daje singularno rešenje jer se ne može dobiti iz opšteg.

$$9. \quad 2x^2 yy' + y^2 = 2$$

Rešenje:

$$2x^2 yy' + y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2 - 2} dy = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{2y}{y^2 - 2} dy = -\int \frac{dx}{x^2}$$

$$2 \ln|y^2 - 2| = \frac{1}{x} + \ln C \Leftrightarrow (y^2 - 2)^2 = C e^{\frac{1}{x}}, \quad C > 0$$

Funkcije $y = \pm\sqrt{2}$ su singularna rešenja jednačine.

$$10. \quad y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Rešenje:

$$y' + \cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y = \cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y \Leftrightarrow$$

$$y' = 2 \sin x \sin 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \sin x \sin 2y \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{\sin 2y} = 2 \sin x dx$$

$$\int \frac{dy}{\sin 2y} = 2 \int \sin x dx$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin 2y &= \frac{2 \sin y \cos y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}, \\ \operatorname{tg} y &= t, \sin 2y = \frac{2t}{1+t^2}, dy = \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \sin x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = 2 \int \sin x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|t| = -\cos 2x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} y| = -\cos 2x + C$$

Za $y(0) = \frac{\pi}{4}$ dobijamo $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| = -2 \cos 0 + C \Leftrightarrow C = 2$ i partikularno rešenje glasi

$$\frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} y| = -\cos 2x + 2$$

$$11. \quad (xy + x) dx = (x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1) dy$$

Rešenje:

$$x(y+1) dx = (x^2 + 1)(y^2 + 1) dy$$

$$\frac{y^2 + 1}{y + 1} dy = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \left(y - 1 + \frac{2}{y+1} \right) dy = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{y^2}{2} - y + 2 \ln|y+1| = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$y^2 - 2y + 4 \ln|y+1| = \ln(x^2+1) + 2C, \ln C_1 = 2C, C_1 > 0$$

$$y^2 - 2y = \ln \frac{C_1(x^2+1)}{(y+1)^4} \Leftrightarrow y^2 - 2y = \ln \frac{C_2(x^2+1)}{(y+1)^4}, C_2 = \pm C_1$$

12. $\sin x \sin y \, dx = \cos x \cos y \, dy$

Rešenje:

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln C = \ln|\sin x| + \ln|\cos y|$$

$$C = |\sin x \cos y|, C_1 = \pm C$$

$$C_1 = \sin x \cos y$$

13. $(y^2 + y + 1) dx + x(x^2 - 4) dy = 0$

Rešenje:

$$\frac{dx}{x(x^2-4)} = -\frac{dy}{y^2+y+1}$$

$$\frac{1}{x(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{8}, C = \frac{1}{8}$$

$$\int \left(-\frac{1}{4x} + \frac{1}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} \right) dx = -\int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln|x-2| + \frac{1}{8} \ln|x+2| + \ln C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{8} \ln \frac{C_1(x^2-4)}{x^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, C_1 = \pm C$$

11.2.2 HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA

Definicija: Jednačina $y' = f(x, y)$ zove se **homogena** diferencijalna jednačina ako se funkcija $f(x, y)$ može predstaviti u obliku

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uvođenjem smene, tj pomoćne nepoznate diferencijabilne funkcije $u(x)$ tako da je:

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{tj.} \quad y = xu,$$

svaka homogena jednačina se može svesti na jednačinu sa razdvojenim promenljivim.

Naime, kako je $y' = u + xu'$ jednačina $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se svodi na

$$u + xu' = \varphi(u) \quad \text{tj.} \quad x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \quad (\varphi(u) - u \neq 0),$$

dakle

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C$$

Ako je sada opšte rešenje $u = f(x, C)$, dolazi se do opšteg rešenja date homogene jednačine $y = xu = xf(x, C)$.

Ukoliko ne možemo naći eksplicitno rešenje po promenljivoj u , tada se posle izvršene integracije u zameni sa $\frac{y}{x}$ i na taj način dobija traženo rešenje u implicitnom obliku.

ZADACI

Rešiti diferencijalne jednačine:

$$1. \quad y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Rešenje:

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u ; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = u + u^2 \Leftrightarrow u'x = u^2 \Leftrightarrow u' = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = u^2$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$-\frac{1}{u} = \ln C|x| \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln Cx} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\ln Cx}.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$2. \quad xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

Rešenje:

$$xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y \Leftrightarrow y' = \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u ; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \sqrt{3 + u^2} + u \Leftrightarrow u'x = \sqrt{3 + u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{3 + u^2}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{3 + u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u + \sqrt{3 + u^2}| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$\ln|u + \sqrt{3 + u^2}| = \ln C_1|x|, C = \pm C_1$$

$$u + \sqrt{3 + u^2} = Cx \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx \Leftrightarrow y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^2.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$3. \quad 2xyy' = x^2 + 3y^2.$$

Rešenje:

$$2xyy' = x^2 + 3y^2 \quad | : xy \quad xy \neq 0$$

$$2y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{3y^2}{xy} \Leftrightarrow 2y' = \frac{x}{y} + \frac{3y}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u ; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} \Leftrightarrow u'x = \frac{1+u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u^2}{2u}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u}{1+u^2} du$$

$$\ln|x| = \ln(1+u^2) - \ln C \Leftrightarrow \ln|x| = \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln C \Leftrightarrow \ln|x|C = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

$$xC_1 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C_1 x^3 \Leftrightarrow y^2 = x^2 (C_1 x - 1). C_1 = \pm C$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

4. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Rešenje:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}, u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow y' = u'x + u$$

$$xu' + u = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} - u \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2} du \Leftrightarrow$$

$$\ln|x|C = \int \frac{1}{1+u^2} du - \int \frac{u}{1+u^2} du$$

$$\ln|x|C = \arctgu - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \Leftrightarrow \ln C_1 x \sqrt{1+u^2} = \arctgu, C_1 = \pm C$$

$$C_1 x \sqrt{1+u^2} = e^{\arctgu} \Leftrightarrow C_1 \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

5. $x^2 y^2 dx + xy dy = 0.$

Rešenje

$$x^2 y^2 dx + xy dy = 0 \Leftrightarrow x^2 y^2 + xy \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + y' = 0$$

smena: $\frac{y}{x} = u; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$\frac{1}{u} + u + u'x + u = 0 \Leftrightarrow u'x = -2u - \frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{2u^2 + 1}{u}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{udu}{2u^2+1} \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(2u^2+1) - \ln C_1$$

$$C_1 x = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2u^2}{x^2}+1}} \Leftrightarrow Cx^4 = \frac{1}{2y^2+x^2} \Leftrightarrow 2y^2+x^2 = \frac{1}{Cx^4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1-Cx^6}{2Cx^4}.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$6. (x^2 + y^2)dx + x^2 dy = 0$$

Rešenje:

$$(x^2 + y^2)dx + x^2 dy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + y' = 0$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$1 + u^2 + u'x + u = 0 \Leftrightarrow u'x = -(u^2 + u + 1) \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 + u + 1} = -\frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + \ln C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln C|x| \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln C_1 x, C_1 = \pm C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln Cx.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$7. (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Rešenje:

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} - 3\frac{y}{x} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{y}{x}} + 2y' = 0.$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $u = u(x)$ $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$\frac{1}{u} - 3u + 2u'x + 2u = 0 \Rightarrow 2u'x = u - \frac{1}{u} \Rightarrow 2u'x = \frac{u^2 - 1}{u}$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u}{u^2 - 1} du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(u^2 - 1)}{u^2 - 1}$$

$$\ln|x| + \ln C_1 = \ln|u^2 - 1|, |u^2 - 1| = |x| \cdot C_1, u^2 - 1 = Cx, C = \pm C_1 \Rightarrow u^2 = Cx + 1$$

$$\frac{y^2}{x^2} = Cx + 1 \Rightarrow y^2 = Cx^3 + x^2$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$8. \quad \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx = x dy.$$

Rešenje:

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx = x dy$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = y'$$

smena: $\frac{y}{x} = u; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = u'x + u$$

$$\sqrt{1 + u^2} = u'x; u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \sqrt{1 + u^2} = \frac{du}{dx} \cdot x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Rightarrow \ln|x| + \ln C = \ln|u + \sqrt{u^2 + 1}|$$

$$xC = u + \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow xC = \frac{y}{x} \sqrt{\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1} \Rightarrow Cx^2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$9. \quad (3x + y)y' = x + 3y.$$

Rešenje:

$$(3x + y)y' = x + 3y \Rightarrow \left(3 + \frac{y}{x} \right) y' = 1 + 3 \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{1 + 3 \cdot \frac{y}{x}}{3 + \frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3 \cdot \frac{y}{x}}{3 + \frac{y}{x}}$$

smena: $\frac{y}{x} = u; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u.$

$$\begin{aligned}
u'x + u &= \frac{1+3u}{3+u} \Rightarrow u'x = \frac{1+3u}{3+u} - u \Rightarrow u'x = \frac{1+3u-3u-u^2}{3+u} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1-u^2}{3+u} \\
\Rightarrow \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{3+u}{1-u^2} du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = 3 \int \frac{du}{1-u^2} + \int \frac{u du}{1-u^2} \\
\frac{1}{(1-u)(1+u)} &= \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \quad | \cdot (1-u) \cdot (1+u) \Rightarrow \\
1 &= A(1+u) + B(1-u) \\
1 &= u \left(A \underset{0}{\cancel{1}} B \right) + A \underset{1}{\cancel{1}} B \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{du}{1-u^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-u^2)}{1-u^2} \\
\ln|x| + \ln C &= \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{2} \ln|1-u^2| \\
\ln Cx &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+u)^3}{(1-u)^4(1+u)} \Rightarrow \ln Cx = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+u)^2}{(1-u)^4} \\
\ln Cx &= \ln \frac{1+u}{(1-u)^2} \Rightarrow Cx = \frac{1+u}{(1-u)^2}, Cx = \frac{1+\frac{y}{x}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^2}, Cx = \frac{x+y}{x\left(1-\frac{y}{x}\right)^2} \\
x+y &= Cx^2 \left(1-\frac{y}{x}\right)^2, x+y = C(x-y)^2 \Rightarrow (x-y)^2 = \frac{x+y}{C}.
\end{aligned}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

10. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

Rešenje:

$$xy' = y \ln \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u'x + u = u \ln u \Rightarrow u'x = u \ln u - u \Leftrightarrow$$

$$u'x = u(\ln u - 1) \Leftrightarrow \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u(\ln u - 1)}, \{t = \ln u - 1\}$$

$$\ln|x| + \ln C = \ln(\ln u - 1) \Leftrightarrow \ln C_1 x = \ln(\ln u - 1) \Leftrightarrow$$

$$C_1 x = \ln u - 1 \Leftrightarrow C_1 x + 1 = \ln u \Leftrightarrow C_1 x + 1 = \ln \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = e^{C_1 x + 1} \Leftrightarrow$$

$$y = x e^{C_1 x + 1}.$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$11. xy' - y = x \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right), \quad x \neq 0 \text{ i } y(1) = 0$$

Rešenje:

$$y' - \frac{y}{x} = 1 + e^{\frac{y}{x}}$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u + xu' - u = 1 + e^u \Leftrightarrow \frac{du}{1 + e^u} = \frac{dx}{x}$$

$$\left\{ 1 + e^u = t, e^u du = dt, du = \frac{dt}{t-1} \right\}$$

$$\frac{dt}{t(t-1)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| = \ln |x| + \ln C \Leftrightarrow \left| \frac{t-1}{t} \right| = |x| C \Leftrightarrow \frac{t-1}{t} = x C_1$$

$$\frac{e^u}{1 + e^u} = x C_1 \Leftrightarrow e^u = \frac{x C_1}{1 - x C_1} \Leftrightarrow u = \ln \frac{x C_1}{1 - x C_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \ln \frac{x C_1}{1 - x C_1} \Leftrightarrow y = x \ln \frac{x C_1}{1 - x C_1}$$

Iz početnog uslova dobijamo $0 = 1 \cdot \ln \frac{C}{1-C} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Partikularno rešenje glasi $y = x \ln \frac{x}{2-x}$

$$12. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Deobom date jednačine sa dž, dobijamo $y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ smena $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x} \Rightarrow z'x + z - z = \operatorname{tg} z \Rightarrow \frac{dz}{dx} x = \operatorname{tg} z \Rightarrow \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin z| = \ln|x| + \ln c \Rightarrow \sin z = xc \Rightarrow \sin \frac{y}{x} = xc$$

Ako je $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

Pa je partikularno rešenje $\sin \frac{y}{x} = \frac{x}{2}$

13. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$

Deobom date jednačine sa $\frac{y}{x}$ dobijamo $y' - \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$,

Smena $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$z'x + z - z = z \ln z \Rightarrow z'x = z \ln z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z \ln z \Rightarrow \frac{dz}{z \ln z} = \frac{dx}{x}$$

smena ($\ln z = t$) $\ln|\ln z| = \ln xc \Rightarrow \ln z = c_1 x \Rightarrow z = e^{c_1 x} \Rightarrow y = xe^{c_1 x}$

Iz $y(1)=e \Rightarrow c=1$

14. $x^2 y' = y(x + y)$

Deobom jednačine sa x^2 dobijamo

$$y' - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{ i uvođenjem smene } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$\frac{du}{dx} x = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln|x| + c}$$

Ako je $y(1) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow c = -\ln 2$

Pa je partikularno rešenje $y = -\frac{x}{\ln \frac{|x|}{2}}$

11.2.3 LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA

Definicija: *Linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda* nazivamo jednačinu

$$y' + f(x)y = g(x)$$

koja je linearna u odnosu na funkciju $y(x)$ i njen izvod. $f(x)$ i $g(x)$ su zadate neprekidne funkcije.

Teorema: Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine je:

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[\int g(x) e^{\int f(x)dx} dx + C \right].$$

Dokaz

Predpostavimo da se rešenje može napisati u obliku $y = u(x) \cdot v(x)$. Tada je $y' = u'v + uv'$. Ako ovo uvrstimo u polaznu jednačinu dobijamo $u'v + uv' + f(x)u \cdot v = g(x)$

$$uv' + v(u' + f(x)u) = g(x)$$

Ako pretpostavimo da je $u' + f(x) \cdot u = 0$, imamo $uv' = g(x)$.

Problem se svodi na rešavanje sistema jednačina $u' + f(x) \cdot u = 0$ i $uv' = g(x)$ iz kojih računamo u i v . Dakle:

$$u' + f(x) \cdot u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -f(x) dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int f(x) dx$$

$$\ln u = -\int f(x) dx$$

$$u = e^{-\int f(x) dx}$$

$$e^{-\int f(x) dx} v' = g(x)$$

$$v' = g(x) e^{\int f(x) dx}$$

$$v = \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C$$

Rešenje po y glasi $y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C \right]$.

Napomena: Integraciona konstanta C sadrži u sebi i konstantu koju smo dobili integracijom promenljive u .

ZADACI**Rešiti diferencijalne jednačine:**

$$1. \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Rešenje:

Kako je $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin(x)$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{\int \frac{dx}{x}} \sin x \, dx + C \right) = e^{-\ln|x|} \left(\int e^{\ln|x|} \sin x \, dx + C \right) =$$

$$\frac{1}{|x|} \left(\int |x| \sin x \, dx + C \right)$$

Za $x > 0$, dobijamo

$$y = \frac{1}{x} (\sin x - x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$$

Za $x < 0$, dobijamo

$$y = -\frac{1}{x} (-\sin x + x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{C}{x} = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Iz ovoga primera vidimo da nije potrebno koristiti apsolutnu vrednost zato što sve promene znaka apsorbuje integraciona konstanta.

$$y = \frac{1}{x} (\sin x - x \cos x + C) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

$$2. \quad y' + 2y - (x^2 + 2x) = 0, \quad y(0) = \frac{3}{4}$$

Rešenje:

$$y' + 2y = x^2 + 2x$$

$$f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 2x$$

$$y = e^{-2x} \left(\int e^{2x} (x^2 + 2x) \, dx + C \right)$$

$$\int e^{2x} (x^2 + 2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 2x, du = 2x + 2 \\ dv = e^{2x} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \cdot e^{2x} - \int (x+1) \cdot e^{2x} dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x+1, du = dx \\ dv = e^{2x} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$y = e^{-2x} \left(C + \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 + 2x + 3) \right) = e^{-2x} C + \frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 3)$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

3. $y' + y = \sin x$

Rešenje:

$$f(x) = 1, g(x) = \sin x$$

$$y = e^{-\int dx} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \cdot \left[\int e^x \sin x dx + C \right]$$

$$\left\{ \int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right\}$$

$$y = e^{-x} \left[C + \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \right] = \frac{C}{e^x} + \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

4. $y' + y \sin x = \sin x$.

Rešenje

$$f(x) = \sin x, g(x) = \sin x$$

$$y = e^{-\int \sin x dx} \left[\int \sin x \cdot e^{\int \sin x dx} dx + C \right] = e^{\cos x} \left[\int \sin x \cdot e^{-\cos x} dx + C \right] = \left\{ \begin{array}{l} t = -\cos x \\ dt = \sin x dx \end{array} \right\} =$$

$$= e^{\cos x} \left[e^{-\cos x} + C \right] = 1 + C \cdot e^{\cos x}$$

rešenje polazne diferencijalne jednačine.

5. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$.

Rešenje:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \sin x$$

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\int \operatorname{tg} x dx} dx \right],$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|;$$

$$y = e^{\ln(\cos x)} \cdot \left[\int \sin x \cdot e^{\ln(\cos x)^{-1}} dx + C \right] = \cos x \cdot \left[\int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C \right]$$

$$= \cos x \cdot \left[\int \operatorname{tg} x dx + C \right] = \cos x \cdot [C - \ln(\cos x)]$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

$$6. \quad xy' - y = x^5.$$

Rešenje:

$$y' - \frac{y}{x} = x^4$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = x^4$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[\int x^4 e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right] = e^{\ln x} \cdot \left[\int x^4 e^{-\ln x} dx + C \right] = x \cdot \left[\int x^4 \frac{1}{x} dx + C \right] =$$

$$x \cdot \left[C + \frac{x^4}{4} \right] = Cx + \frac{x^5}{4}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$7. \quad xy' + 2y = e^{x^2}.$$

Rešenje:

$$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x} e^{x^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = \frac{1}{x} e^{x^2}$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = e^{-2\ln x} \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} e^{2\ln x} dx + C \right] =$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \left[\int \frac{e^{x^2}}{x} x^2 dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x \cdot e^{x^2} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right]$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$8. \quad xy' - y = x \ln x.$$

Rešenje:

$$y' - \frac{y}{x} = \ln x$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = \ln x$$

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left[\int \ln x \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} dx + C \right] = e^{\ln x} \cdot \left[\int \ln x \cdot e^{-\ln x} dx + C \right] =$$

$$x \cdot \left[\int \frac{\ln x}{x} dx + C \right] = x \cdot \left[C + \frac{\ln^2 x}{2} \right]$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$9. \quad y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\cos^2 x$$

Rešenje:

$$y' - \operatorname{ctgx} \cdot y = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$f(x) = -\operatorname{ctgx}, g(x) = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$y = e^{\int \operatorname{ctgx} dx} \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \cdot e^{-\int \operatorname{ctgx} dx} dx \right], \quad \int \operatorname{ctgx} dx = \ln |\sin x|$$

$$y = e^{\ln(\sin x)} \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} e^{-\ln(\sin x)} dx \right] =$$

$$\sin x \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx \right] =$$

$$\sin x \cdot \left[C - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx \right] = \sin x \cdot \left[C - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int dx \right]$$

$$y = \sin x \cdot [C + \operatorname{ctgx} + x]$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$10. \quad (y + x^3 \sin x) dx - x dy = 0$$

Rešenje:

$$(y + x^3 \sin x) - xy' = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin x$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = x^2 \sin x$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int e^{-\int \frac{dx}{x}} x^2 \sin x dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\int e^{-\ln x} x^2 \sin x dx + C \right) = x \left(\int x \sin x dx + C \right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = x \left(-x \cos x + \int \cos x dx + C \right) = x \left(-x \cos x + \sin x + C \right)$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Ako je $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{\pi} - 1$

Partikularno rešenje $y_p = x \left(\frac{2}{\pi} - 1 - x \cos x + \sin x \right)$

11. $y' + y \sin x = 2xe^{\cos x}$

Rešenje:

$$f(x) = \sin x, g(x) = 2xe^{\cos x}$$

$$y = e^{-\int \sin x dx} \left(2 \int e^{\int \sin x dx} x e^{\cos x} dx + C \right) = e^{\cos x} \left(2 \int e^{-\cos x} e^{\cos x} x dx + C \right) = e^{\cos x} \left(2 \int x dx + C \right) =$$

$$e^{\cos x} (x^2 + C)$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

12. $y - x^2 y' = 1 + xy'$

Rešenje:

$$y'(x + x^2) - y = -1$$

$$y' - y \frac{1}{x + x^2} = -\frac{1}{x + x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x + x^2}, g(x) = -\frac{1}{x + x^2}$$

$$e^{\int \frac{dx}{x+x^2}} \left(C - \int e^{-\int \frac{1}{x+x^2}} -\frac{1}{x+x^2} dx + C \right) =$$

$$\left\{ \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1} \right\}$$

$$e^{\ln \frac{x}{x+1}} \left(C - \int e^{-\ln \frac{x}{x+1}} \frac{1}{x+x^2} dx \right) = \frac{x}{x+1} \left(C - \int \frac{x+1}{x} \frac{1}{x(x+1)} dx \right) =$$

$$\frac{x}{x+1} \left(C - \int \frac{dx}{x^2} \right) = \frac{x}{x+1} \left(C + \frac{1}{x} \right) = \frac{xC}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$13. \quad x^2 y' + xy - 8x^2 \cos^2 x = 0$$

Rešenje:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 8 \cos^2 x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 8 \cos^2 x$$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int 8 \cos^2 x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) = e^{-\ln x} \left(C + \int 8 \cos^2 x \cdot e^{\ln x} dx \right) =$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 8 \int x \cdot \cos^2 x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + 8 \int x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 4 \int (x + x \cdot \cos 2x) dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + 2x^2 + 4 \int x \cos 2x dx \right) =$$

$$\left\{ \int x \cos 2x dx = \begin{cases} u = x, du = dx \\ dv = \cos 2x dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases} = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \right. \\ \left. \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right\}$$

$$\frac{1}{x} \left(C + 2x^2 + 4 \left(\frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \right) = \frac{C}{x} + 2x + 2 \sin 2x + \frac{1}{x} \cos 2x$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$14. \quad y' = 2(2x - y), \quad y(0) = 1$$

Rešenje:

$$y' + 2y = 4x$$

$$f(x) = 2, g(x) = 4x$$

$$y = e^{-2 \int dx} \left(C + 4 \int x e^{2 \int dx} dx \right) = e^{-2x} \left(C + 4 \int x e^{2x} dx \right) =$$

$$\left\{ \int x e^{2x} dx = \begin{cases} u = x, du = dx \\ dv = e^{2x} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right\}$$

$$= e^{-2x} \left(C + 4 \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \right) = C e^{-2x} + 2x - 1$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Ako je $y(0) = 1 \Rightarrow C = 2$

Partikularno rešenje je $y_p = 2e^{-2x} + 2x - 1$

$$15. \quad y' + 2xy = x^3, \quad y(1) = 1$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, \quad g(x) = x^3 \\ y &= e^{-2 \int x dx} \left(C + \int x^3 e^{2 \int x dx} dx \right) = e^{-x^2} \left(C + \int x^3 e^{x^2} dx \right) = \\ &\left\{ \int x^3 e^{x^2} dx = \begin{cases} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = x e^{x^2} dx, v = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{cases} \right\} = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} \left\{ \right. \\ &e^{-x^2} \left(C + \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} \right) = C e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Ako je $y(1) = 1 \Rightarrow C = e$

Partikularno rešenje je

$$y_p = e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$16. \quad y' + y \cdot \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{ctg} x, \quad g(x) = 5e^{\cos x} \\ y &= e^{-\int \operatorname{ctg} x dx} \left(C + 5 \int e^{\cos x} e^{\int \operatorname{ctg} x dx} dx \right) = e^{-\ln \sin x} \left(C + 5 \int e^{\cos x} e^{\ln \sin x} dx \right) = \\ &\frac{1}{\sin x} \left(C + 5 \int e^{\cos x} \sin x dx \right) = \left\{ \int e^{\cos x} \sin x dx = \begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{cases} \right\} = -e^{\cos x} \left\{ \right. \\ &\frac{1}{\sin x} (C - 5 \cdot e^{\cos x}) \end{aligned}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Ako je $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \Rightarrow C = 1$

Partikularno rešenje je

$$y_p = \frac{1}{\sin x} (1 - 5 \cdot e^{\cos x})$$

$$17. y' \cos^2 x + y = 1, y(0) = 0$$

Rezultat:

$$y_p = 1 - e^{-\operatorname{tg} x}$$

$$18. xy' + y = x^3 + x$$

Rezultat:

$$y = \frac{1}{4} \left(x^3 + 2x + C \frac{1}{x} \right)$$

11.2.4 BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Na linearne jednačine se svode i jednačine složenijeg oblika, kao recimo tzv. **Bernulijeva jednačina**

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, n \in \mathbb{N}, n \neq 0, n \neq 1.$$

Za $n=0$ predstavlja linearnu jednačinu.

Za $n=1$ jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

Jednačina se svodi na linearnu deobom jednačine sa y^n

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = g(x)$$

ako se uvede smena $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$, gde je $z = z(x)$ nova funkcija. Kako je

$$z' = (1-n) \frac{1}{y^n} \cdot y'$$

jednačina postaje

$$\frac{z'}{1-n} + f(x) \cdot z = g(x)$$

$$z' + (1-n)f(x) \cdot z = (1-n)g(x) \text{ linearna.}$$

čije opšte rešenje nalazimo na već pokazani način.

U praksi jednačina se rešava uvođenjem smene $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

Vraćanjem smene nalazimo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

ZADACI

1. Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y + xy^2 = 0$ za koje je $y(1) = 1$.

Rešenje:

Ako datu jednačinu podelimo sa $x \neq 0$, dobijamo:

$$y' + \frac{1}{x}y = -y^2.$$

Ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Da bismo je rešili, uvodimo novu funkciju z smenom $y = z^{-1}$.

Odavde je $y' = -z^{-2} \cdot z'$ pa data jednačina postaje

$$-z^{-2} \cdot z' + \frac{1}{x}z^{-1} = -z^{-2},$$

odnosno posle deljenja sa $-z^{-2} \neq 0$, dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu po z :

$$z' - \frac{1}{x}z = 1.$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x \left(C + \int \frac{dx}{x} \right) = x(C + \ln|x|),$$

$y = \frac{1}{z}$, pa zamenom dobijamo opšte rešenje date jednačine

$$y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)}.$$

Kako je $y(1) = 1$, biće $1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$,

pa je traženo rešenje za zadati početni uslov

$$y = \frac{1}{x(1 + \ln|x|)}.$$

2. Naći opšte rešenje jednačine $y' + y = xy^5$.

Rešenje:

$$y = z^{\frac{1}{1-5}} \Rightarrow y = z^{-\frac{1}{4}}$$

$$y' = -\frac{1}{4} z^{-\frac{1}{4}-1} z' \Rightarrow y' = -\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}} \cdot z'.$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo:

$$-\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}} z' + z^{-\frac{1}{4}} = x z^{-\frac{5}{4}} \Big| : -\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}}$$

$$z' - 4z = -4x$$

$$z = e^{4x} \left(C - 4 \int x e^{-4x} dx \right) = C e^{4x} + x + \frac{1}{4}$$

Kako je $y^{-4} = z \Leftrightarrow y = \pm \sqrt[4]{z}$,

opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je:

$$y = \pm \left(C e^{4x} + x + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}}, \text{ gde je } C \text{ proizvoljna konstanta.}$$

3. $xy' - y = 2y^2 x \ln x, y(1) = 1.$

Rešenje:

Deljenjem ove jednačine sa $x \neq 0$ dobijamo

$$y' - \frac{1}{x} y = 2y^2 \ln x.$$

Uvodimo smenu

$$y = z^{-1} \Rightarrow y' = -z^{-2} z'$$

pa dobijamo

$$-z^{-2} \cdot z' - \frac{1}{x} z^{-1} = 2z^{-2} \ln x.$$

$$z'' + \frac{1}{x} z = -2 \ln x.$$

Opšte rešenje ove jednačine je

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C - 2 \int e^{\int \frac{dx}{x}} \ln x dx \right) = e^{-\ln x} \left(C - 2 \int e^{\ln x} \ln x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C - 2 \int x \ln x dx \right);$$

$$\int x \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

$$z = \frac{1}{x} \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right),$$

pa je opšte rešenje date jednačine $y = z^{-1} = x \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}$.

Ako je $y(1) = 1$, $C = \frac{1}{2}$.

$y_p = x \left(\frac{1}{2} - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine.

4. $y' + xy = xy^3$

Rešenje:

smena $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot z'$

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' + x z^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{3}{2}}$$

$$z' - 2xz = -2x$$

$$z = e^{x^2} \left(C - 2 \int e^{-x^2} x dx \right) = e^{x^2} \left(C + e^{-x^2} \right) = 1 + C e^{x^2}$$

vraćanjem smene dobijamo opšte rešenje je polazne diferencijalne jednačine.

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + C e^{x^2}}}.$$

5. $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}}$

Rešenje:

smena $y = z^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = z^3$, $y' = 3 \cdot z^2 z'$

$$3z^2 z' - 9x^2 z^3 = (x^5 + x^2) z^2$$

smena

$$z' - 3x^2 z = \frac{1}{3} (x^5 + x^2)$$

$$z = e^{x^3} \left(C + \int \frac{x^5 + x^2}{3} e^{-x^3} dx \right) = e^{x^3} \left(C + \frac{1}{3} \left(\int x^5 e^{-x^3} dx + \int x^2 e^{-x^3} dx \right) \right) =$$

$$z = C e^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9}.$$

$y = \left(C e^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9} \right)^3$ je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Ako je $y(0) = 0$, $C = \frac{2}{9}$

$y_p = \left(\frac{2}{9}e^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9} \right)^3$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine.

6. $x^3 y^2 + xy = y'$

Rešenje:

$$y' - xy = x^3 y^2$$

smena $y = z^{\frac{1}{1-2}} = z^{-1}, y' = -z^{-2} z'$

$$z + xz = -x^3$$

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right) =$$

parcijalna $\left\{ \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = x e^{\frac{x^2}{2}} dx, v = e^{\frac{x^2}{2}} \end{cases} = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 e^{\frac{x^2}{2}} \right\}$

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2 e^{\frac{x^2}{2}} \right) = C e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Ako je $y(1) = 1$ $C = 0$

$y_p = \frac{1}{2-x^2}$ je partikularno rešenje.

7. $y' - \frac{1}{x} y - x^2 \sqrt{y} = 0$

Rešenje:

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2 \sqrt{y}$$

$$y = z^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = z^2, y' = 2 \cdot z \cdot z'$$

$$2zz' - \frac{1}{x} z^2 = x^2 z \Leftrightarrow z' - \frac{1}{2x} z = \frac{1}{2} x^2$$

$$z = e^{\frac{1}{2} \ln x} \left(C + \int e^{-\frac{1}{2} \ln x} \cdot \frac{x^2}{2} dx \right) = \sqrt{x} \left(C + \frac{1}{2} \int x \sqrt{x} dx \right) = \sqrt{x} \left(C + \frac{1}{5} \sqrt{x^5} \right) = C \sqrt{x} + \frac{1}{5} x^3$$

$$y = \left(C \sqrt{x} + \frac{1}{5} x^3 \right)^2$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Ako je $y(1) = 0$, $C = -\frac{1}{5}$

$y_p = \frac{1}{5}\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3$ je partikularno rešenje.

8. $xy' + y = x^3y^6$

Rešenje:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^6$$

$$y = z^{\frac{1}{1-6}} = z^{-\frac{1}{5}}, y' = -\frac{1}{5} \cdot z^{-\frac{6}{5}} \cdot z'$$

$$-\frac{1}{5} \cdot z^{-\frac{6}{5}} \cdot z' + \frac{1}{x}z^{-\frac{1}{5}} = x^2z^{-\frac{6}{5}}$$

$$z' - \frac{5}{x}z = -5x^2$$

$$z = e^{\ln x^5} \left(C - 5 \int x^2 e^{-\ln x^5} dx \right) = x^5 \left(C - 5 \int x^2 \frac{1}{x^5} dx \right) = x^5 \left(C - 5 \int \frac{1}{x^3} dx \right) =$$

$$x^5 \left(C + \frac{5}{2x^2} \right) = Cx^5 + \frac{5}{2}x^3$$

9. $y' - y = xy^5$

Rezultat $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$:

10. $y' - y = xy^2$

Rezultat $y = \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$

11.3 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

11.3.1 LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima ima oblik:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

11.3.2 HOMOGENA LINEARNA DIF. JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Ako je u opštem obliku linearne diferencijalne jednačine drugog reda $f(x) = 0$, dobije se homogena linearna dif. jednačina drugog reda:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Za dva partikularna rešenja ove jednačine y_1 i y_2 , kaže se da obrazuju fundamentalni nsistem rešenja (da su linearno nezavisna rešenja), ako njihov količnik nije konstanta $y_2/y_1 \neq \text{const.}$

Postupak rešavanja

Potražimo partikularno rešenje u obliku $y = e^{kx}$ gde je k - konstanta koju treba odrediti. Sledi:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx},$$

Zamenom y'' , y' i y u polaznu jednačinu dobije se:

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0 \quad \text{kako je za konačne vrednosti argumenta } e^{kx} \neq 0 \text{ to je:}$$

$$k^2 + ak + b = 0 \quad \text{karakteristična jednačina lin.hom.dif.jenačine sa konst.koef.}$$

Oblik rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda zavisi od rešenja karakteristične (kvadratne) jednačine pa zato postoje tri slučaja.

a) Diskriminanta $D > 0$, k_1 i k_2 su realni i različiti. Tada je rešenje dif.jednačine:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Primer 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 3y' - 10y = 0$.

$$k^2 + 3k - 10 = 0, \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 40}}{2} \Rightarrow k_1 = 2, \quad k_2 = -5, \text{ pa je traženo rešenje:}$$

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} .}$$

b) Diskriminanta $D=0$, $k_1=k_2=k$, rešenja su međusobno jednaka (dvostruko rešenje) i realna:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$$

Primer 2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + y = 0$.

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = k = 1, \text{ pa je traženo rešenje}$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x$$

c) Diskriminanta $D < 0$, k_1 i k_2 su konjugovano kompleksni $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Oblik reš. je:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Primer 3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y' + 13y = 0$.

$$k^2 + 4k + 13 = 0, \quad k_1 = -2 + 3i, \quad k_2 = -2 - 3i, \text{ tj. } \alpha = -2, \beta = 3, \text{ pa je rešenje date jednačine:}$$

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

Za određivanje vrednosti konstanti C_1 i C_2 , zadaju se dva tzv. početna uslova iz kojih se formiraju dve jednačine i odrede ove konstante.

11.3.3 NEHOMOGENA LINEARNA DIF. JEDNAČINA DRUGOGREDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Rešanja ove diferencijalne jednačine se nalaze prema teoremi (koju ovde navodimo bez dokaza):

Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda jednako je zbiru partikularnog rešenja y_p te jednačine i općeg rešenja odgovarajuće homogene jednačine y_h .

$$y = y_h + y_p$$

y_p - partikularno rešenje koje zavisi od oblika funkcije $f(x)$

y_h - rešenje homogene jednačine ($f(x)=0$).

U tehničkim sistemima koji se opisuju ovakvom jednačinom partikularno rešenje se naziva prinudno. Isto tako prinudno rešenje y_p , ima oblik prinude tj. oblik funkcije $f(x)$.

1^o slučaj $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$, $P_n(x)$ - polinom n -tog stepena. Partikularno rešenje je:

$$y_p = x^\alpha Q_n(x) \cdot e^{mx}, \text{ gde je } Q(x) - \text{polinom istog stepena kao i } P_n(x).$$

Razlikuju se dva oblika rešenja zavisno od toga da li je m -rešenje karakteristične jednačine:

a) m -nije rešenje karakteristične jednačine, tada je $\alpha=0$,

$$y_p = Q_n(x) \cdot e^{mx}$$

b) m -jeste koren karakteristične jednačine, tada je α -stepen višestrukosti tog rešenja,

$$y_p = x^\alpha Q_n(x) \cdot e^{mx}$$

Primer 4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 2y = x^2 + 1$.

U jednačini funkcija $f(x)$ je polinom drugog reda pa partikularno rešenje mora biti oblika polinoma drugog reda $y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Primećujemo da je $m=0$, $m \neq k$, pa je i $\alpha=0$.

Postupak rešavanja:

1-korak.

Nađemo homogeno rešenje jednačine

$$y'' + 2y = 0$$

$$k^2 + 2 = 0,$$

$$k_1 = i\sqrt{2}, k_2 = -i\sqrt{2},$$

$$y_h = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$$

2-korak.

Tražimo partikularno rešenje u obliku polinoma drugog reda (takvo je $f(x)$)

$$y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$y_p' = 2a_2 x + a_1$$

$$y_p'' = 2a_2$$

Ove vrednosti uvrstimo u zadatak nehomogenu jednačinu i dobijemo:

$$y_p'' + 2y_p = x^2 + 1$$

$$2a_2 + 2(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = x^2 + 1$$

$$2a_2 x^2 + 2a_1 x + 2a_0 = x^2 + 1$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata leve i desne strane jednačine dobije se:

$$2a_2 = 1$$

$$2a_1 = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 0.$$

partikularno rešenje je:

$$y_p = \frac{1}{2} x^2$$

Rešenje date nehomogene diferencijalne jednačine je:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{2} x^2.$$

2^o slučaj

$$f(x) = a_1 \cos nx + b_1 \sin nx$$

Razlikuju se dva oblika rešenja u zavisnosti da li je $\pm ni$ rešenje karakteristične jednačine ili nije:

a) $y_p = \varphi(x) = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$, $\pm ni$ - nije rešenje karakteristične jednačine,

b) $y_p = \varphi(x) = x(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$, $\pm ni$ - jeste rešenje karakteristične jednačine.

Primer 5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Opet je rešenje jednako zbiru homogenog i partikularnog $y = y_h + y_p$
Ovde je $n=1$, a rešavanjem karakteristične jednačine dobije se:

$$k^2 - 6k + 25 = 0$$

$$k_{1,2} = 3 \pm 4i = \alpha \pm \beta i$$

$$y_h = e^{3x} (A \cos 4x + B \sin 4x)$$

Partikularno rešenje tražimo (pošto je $n=1 \neq \beta=4$) u obliku:

$$y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_p' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y_p'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

Sve ovo uvrstimo u datu nehomogenu diferencijalnu jednačinu i dobićemo rešenje y_p ,

$$y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x.$$

$$-C_1 \cos x - C_2 \sin x + 6C_1 \sin x - 6C_2 \cos x + 25C_1 \cos x + 25C_2 \sin x = 2\sin x + 3\cos x \Rightarrow$$

$$(6C_1 + 24C_2) \sin x + (24C_1 - 6C_2) \cos x = 2\sin x + 3\cos x \Rightarrow$$

$$6C_1 + 24C_2 = 2$$

$$24C_1 - 6C_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{14}{102}, \quad C_2 = \frac{5}{102}$$

$$y_p = \frac{1}{102}(14\cos x + 5\sin x)$$

$$y = y_h + y_p = e^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + \frac{1}{102}(14\cos x + 5\sin x)$$

Prime 6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + y' - 6y = (3 - 4x)e^x$

Rešenje:

$$y = y_h + y_p$$

1) Tražimo rešenje odgovarajuće homogene jednačine, rešavajući karakterističnu jedn.

$$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, \quad k_2 = -3 \Rightarrow$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

U polaznoj dif. jednačini je koeficijent u eksponentu $m=1$, a on nije rešenje karakteristične jednačine pa je $\alpha=0$. Zbog toga partikularno rešenje ima oblik:

$$y_p = (a_1 x + a_0) e^x$$

$$y_p' = a_1 e^x + (a_1 x + a_0) e^x = e^x (a_1 x + a_1 + a_0)$$

$$y_p'' = a_1 e^x + (a_1 x + a_1 + a_0) e^x = e^x (a_1 x + 2a_1 + a_0)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u polaznu diferencijalnu jednačinu i deleći sa e^x dobije se:

$$e^x (a_1 x + 2a_1 + a_0) + e^x (a_1 x + a_1 + a_0) - 6e^x (a_1 x + a_0) = (3 - 4x)e^x$$

$$-4a_1 x + (3a_1 - 4a_0) = 3 - 4x \Rightarrow a_1 = 1 \quad i \quad a_0 = 0$$

$$y_p = x e^x$$

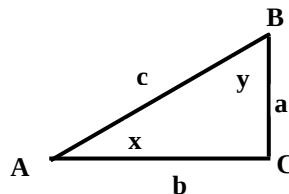
$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x e^x$$

PRILOZI

TRIGONOMETRIJSKE FORMULE I IDENTITETI

$$1) \quad \sin x = \frac{a}{c} = \cos y, \quad \cos x = \frac{b}{c} = \sin y, \quad x + y = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{b}{a},$$



$$a = c \sin x, \quad b = c \cos x$$

$$2) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$3) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \\ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$4) \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

$$\sin x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$$

Adicione teoreme, funkcije dvostrukog i polovicnog ugla

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$5) \quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \mp y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

$$6) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$7) \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

Pretvaranje zbira i razlike u proizvod trigonometrijskih funkcija

8)

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

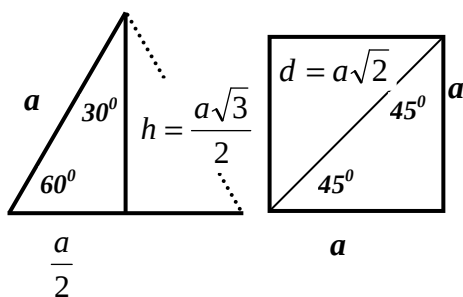
9)

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

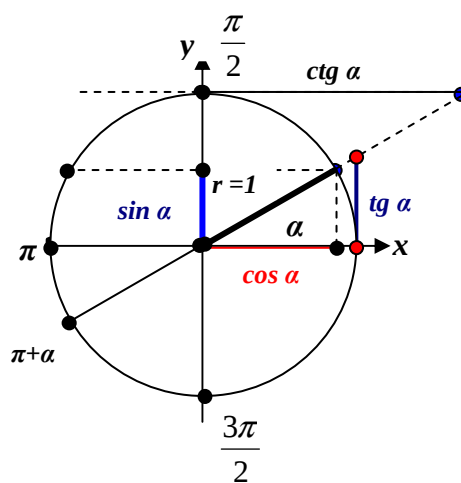
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$



α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$$

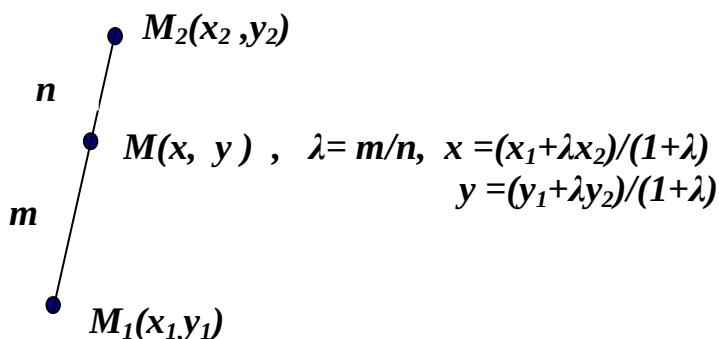
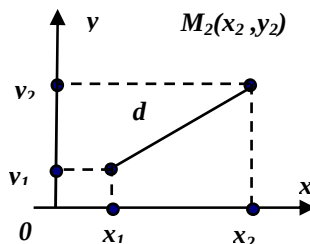
$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi)$$

ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI- FORMULE

Koordinate tačke i rastojanje dve tačke u ravni

Duž d i podela duži u razmeri $m:n=\lambda$

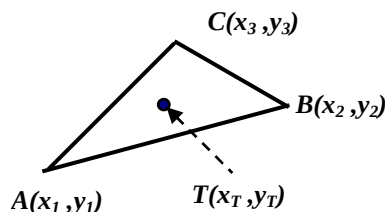
$$1) \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Koordinate težišta i površina trougla

$$2) \quad T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$3) \quad P_{\triangle ABC} = \left| \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \right|$$



4) **PRAVA**

Opšti oblik jednačine prave :

$$ax + by + c = 0,$$

EksPLICITNI oblik jednačine prave:

$$y = kx + n$$

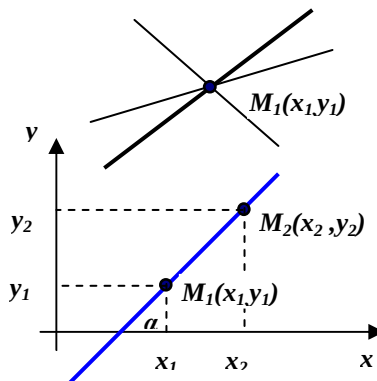
Segmentni oblik jednačine prave:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

Jednačina prave kroz tačku $M(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Jednačina prave kroz dve tačke



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Uslov paralelnosti dve prave: $k_1 = k_2$ ili $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$,

Uslov da se seku dve prave: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$,

Uslov da sudve prave normalne: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

Ugao između dve prave $\text{tg } \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$;

Pramen pravih : $a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2)$

Rastojanje tačke $M(x_1, y_1)$ od prave $ax + by + c = 0$: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Simetrale uglova između dve prave

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\pm \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \text{znak } \pm \text{ suprotan ynaku ispred } c$$

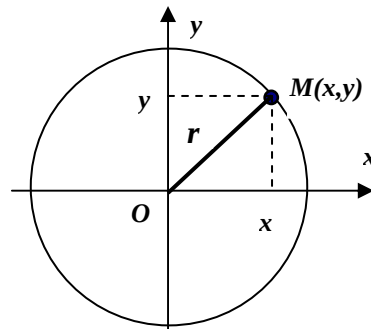
5) KRUŽNICA

Centralna kružnica

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Opšti oblik jednačine kružnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + dx + ey + f &= 0 \\ (x - p)^2 + (y - q)^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 &= r^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}.$$



Uslov dodira prave i centralne kružnice i prave

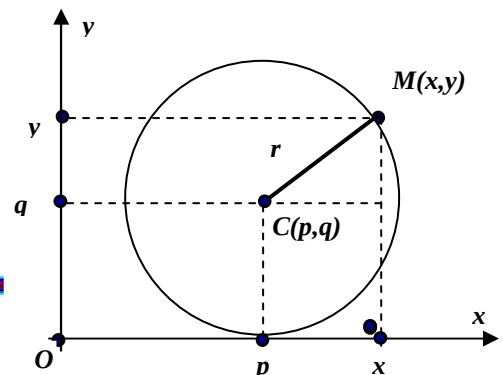
$$r^2(1 + k^2) - n^2 = 0,$$

Opšti uslov dodira kružnice i prave

$$r^2(1 + k^2) - (kp - q + n)^2 = 0,$$

Jednačina tangente na kružnicu u tački $M_1(x_1, y_1)$

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0$$



Za tangentu iz tačke M_1 van kružnice rešava se sietem jednačina :

$$r^2(1 + k^2) - (kp - q + n)^2 = 0, \quad y_1 = kx_1 + n$$

LITERATURA

1. Milan Merkle, *Matematička analiza-pregled teorije i zadaci*. Akademska misao, Beograd, 2003.
2. D. Mihailović, R.R. Janić, *Elementi matematičke analize I*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
3. D.S. Mitrinović, D. Mihailović, P.M. Vasić, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
4. B. Boričić, M. Ivočić, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2008.
5. M. Ivočić, B. Boričić, D. Azdejković, J. Stanojević, *Zbirka zadataka iz matematike*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2008.
6. Mališa Žižović, Olivera Nikolić, Ana Simčević, *Kvantitativne metode-zbirka zadataka*, Singidunum, Beograd, 2010.
7. Mirjana Šekarić, Ivana Kovačević, *Kvantitativne metode za menadžment*, Singidunum, Beograd, 2007.
8. Nikola Tomašević, *Zbirka zadataka iz matematike 2*. Vojnoizdavački zavod, Beograd, 2007.
9. Nedeljko S. Janković, *Matematika 2*, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 2007.
10. Nada Miličić, Miloš Miličić, *Elementi više matematike II-deo*, Akademska misao, Beograd, 2005.
11. Časlav Đaja, *Viša matematika I- deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
12. http://www.mi.sanu.ac.rs/~zorano/dm/DiscMat_prezentacija.pdf
13. www.viser.edu.rs/download.php
14. <http://crnarupa.singidunum.ac.rs/Elektronska%20biblioteka>
15. <http://www.geof.hr/~jbeban/M1/04.pdf>
16. <http://www.rgf.rs/predmet/RO/II%20semestar/Matematika>
17. <http://www.svetnauke.org/diferencijalne-jednacine-prvog-reda>
18. <http://www.matematiranje.com>